Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2023**
Dr. K. Rothe

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 4

Möbius-Transformationen:

Eine Abbildung $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ heißt **Möbius-Transformation**, wenn gilt

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{mit} \quad ad - bc \neq 0\,.$$

Aufgabe 9

Für die Inversion $w = f(z) := \dfrac{1}{z}$ mit $z \neq 0$ bestimme man das Bild

a) der Geraden $\text{Re}(z) = -1$,

b) des Strahls $\text{Im}(z) > 0 \wedge \text{Re}(z) = 0$,

c) des Kreises $|z| = 4$,

d) des Kreises $|z-1| = 1$ und

e) des Kreises $|z-1| = 3$.

Lösung:

Die Umkehrabbildung der Inversion $w = f(z) = \dfrac{1}{z}$ lautet

$$z = f^{-1}(w) = \frac{1}{w}\,,$$

wobei $z \neq 0$ und $w \neq 0$. Damit ergeben sich folgende Bilder

a) $-1 = \mathrm{Re}(z) = \dfrac{1}{2}(z + \bar{z}) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{w} + \dfrac{1}{\bar{w}}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 2w\bar{w} + w + \bar{w} = 0$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{1}{4} = w\bar{w} + \dfrac{1}{2}w + \dfrac{1}{2}\bar{w} + \dfrac{1}{4} \ \Leftrightarrow\ \left(w + \dfrac{1}{2}\right)\left(\bar{w} + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow\ \left|w + \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$

Bild von $\mathrm{Re}(z) = -1$ ist der Kreis um $w_0 = -\dfrac{1}{2}$ mit Radius $r = \dfrac{1}{2}$.

b) $\mathrm{Im}(z) > 0 \wedge \mathrm{Re}(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = iy$ und $y > 0$

$\Leftrightarrow \quad w = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{iy} = -\dfrac{i}{y}$

Der Strahl wird auf den Strahl $\mathrm{Im}(z) < 0 \wedge \mathrm{Re}(z) = 0$ abgebildet und umgekehrt durchlaufen.

c) $4 = |z| = \left|\dfrac{1}{w}\right| \quad \Leftrightarrow \quad |w| = \dfrac{1}{4}\,.$

Der Ursprungskreis vom Radius 4 wird in den Ursprungskreis vom Radius $\dfrac{1}{4}$ abgebildet.

d) $|z - 1| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = z\bar{z} - z - \bar{z} + 1 = \dfrac{1}{w}\dfrac{1}{\bar{w}} - \dfrac{1}{w} - \dfrac{1}{\bar{w}} + 1$

$\Leftrightarrow \quad w + \bar{w} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}(w) = \dfrac{1}{2}\,.$

Das Bild des Kreises ist die Gerade $\mathrm{Re}(w) = \dfrac{1}{2}$.

e) $|z - 1| = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 9 = z\bar{z} - z - \bar{z} + 1 = \dfrac{1}{w}\dfrac{1}{\bar{w}} - \dfrac{1}{w} - \dfrac{1}{\bar{w}} + 1$

$\Leftrightarrow\ w\bar{w} + \dfrac{1}{8}\bar{w} + \dfrac{1}{8}w + \dfrac{1}{64} = \dfrac{1}{64} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{9}{64} \ \Leftrightarrow\ \left|w + \dfrac{1}{8}\right| = \dfrac{3}{8}\,.$

Das Bild des Kreises ist der Kreis um $w_0 = -\dfrac{1}{8}$ mit Radius $r = \dfrac{3}{8}$.

Eigenschaften von Möbius-Transformationen:

a) Eine Möbius-Transformation ist **bijektiv** auf $\mathbb{C}^*$.

b) Die **Umkehrabbildung** einer Möbius-Transformation ist wieder eine Möbius-Transformation.

c) Ein Möbius-Transformation T ist **kreistreu**, d.h. sie bildet verallgemeinerte Kreise auf verallgemeinerte Kreise ab.

Aufgabe 10:

Gegeben sei die Funktion $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$T(z) = \frac{2(1+i)z}{z-1-i}\,.$$

a) Man überprüfe, ob es sich bei T um eine Möbiustransformation handelt.

b) Man berechne alle Fixpunkte von T in kartesischer und Polardarstellung.

c) Man bestimme das Bild der Winkelhalbierenden $\mathrm{Re}\, z = \mathrm{Im}\, z$.

d) Worauf wird die Halbebene oberhalb der Winkelhalbierenden abgebildet?

e) Man berechne die Umkehrabbildung von T.

Lösung:

a) Ein Vergleich mit der Standardform $\quad T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} \quad$ ergibt

$$ad = 2(1+i)(-1-i) = -4i \neq 0 = 0 \cdot 1 = bc\,,$$

d.h. T ist eine Möbius Transformation.

b) $$z = \frac{2(1+i)z}{z-1-i} \overset{z\neq 1+i}{\Leftrightarrow} z(z-1-i) = 2(1+i)z \;\Leftrightarrow\; z(z-3(1+i)) = 0$$

Man erhält also die beiden Fixpunkte $z_1 = 0$ und
$z_2 = 3(1+i) = 3\sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

c) Die Punkte z_1, z_2 und $1+i$ liegen auf der Winkelhalbierenden, also einer Geraden. Daher liegen sie im Bild unter T auf einer Geraden oder einem Kreis. Da z_1 und z_2 Fixpunkte sind und $T(1+i) = \infty$ gilt, wird die Winkelhalbierende auf sich selbst abgebildet.

d) Die oberhalb der Winkelhalbierenden liegende Ebene wird wegen Teil c), $T(i) = 2 - 2i$ und weil T stetig ist auf die unterhalb der Winkelhalbierenden liegende Ebene abgebildet.

e) Durch Auflösen von $w = \dfrac{2(1+i)z}{z-1-i}$ nach z erhält man die Umkehrabbildung:

$$w = \frac{2(1+i)z}{z-1-i} \overset{z\neq 1+i}{\Leftrightarrow} w(z-1-i) = 2(1+i)z$$

$$\Leftrightarrow z(w - 2(1+i)) = (1+i)w \overset{z\neq 2(1+i)}{\Leftrightarrow} z = T^{-1}(w) = \frac{(1+i)w}{w-2(1+i)}$$

Dreipunkteformel und Doppelverhältnis:

a) Sind zwei Tripel z_1, z_2, z_3 und w_1, w_2, w_3 jeweils paarweise verschiedener Zahlen aus $\mathbb{C}$ gegeben, dann gibt es genau eine Möbius-Transformation, für die $w_j = T(z_j)$ mit $j = 1, 2, 3$ gilt. Diese lässt sich berechnen, durch Auflösen der folgenden **Dreipunkteformel** nach w:

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} : \frac{w_3-w_1}{w_3-w_2} = \frac{z-z_1}{z-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2} \, .$$

b)

$$D(z_0, z_1, z_2, z_3) := \frac{z_0-z_1}{z_0-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$$

wird als **Doppelverhältnis** der vier verschiedenen Punkte $z_0, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ bezeichnet.

c) Unter einer Möbius-Transformation T ist das Doppelverhältnis invariant, d.h. es gilt:

$$D(z_0, z_1, z_2, z_3) = D(T(z_0), T(z_1), T(z_2), T(z_3)) \, .$$

d) Der Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ liegt genau dann auf dem durch die Punkte $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ bestimmten verallgemeinerten Kreis K, falls gilt

$$D(z_0, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R} \, .$$

Denn für die Möbius-Transformation T mit $T(z_1) = 0$, $T(z_2) = \infty$, $T(z_3) = 1$ gilt $T(K) = \mathbb{R}$ und

$$D(T(z_0), T(z_1), T(z_2), T(z_3)) = T(z_0) \, .$$

Aufgabe 11:

a) Man gebe eine Möbius-Transformation T an, mit:

$$T(0) = 0\,, \quad T(-2) = 4 \quad \text{und} \quad T(i-1) = 2+2i\,.$$

b) Liegen $z_0 = -1-i, z_1 = 0, z_2 = -2$ und $z_3 = i-1$ auf einem Kreis?

c) Man zeichne den Kreis $K: \ |z+1| = 1$ und die Punkte $z_1 = 0$, $z_2 = -2$, $z_3 = i-1$, sowie $T(K)$ mit $T(z_i)$ für $i = 1, 2, 3$.

Lösung:

a) Einsetzen in die Dreipunkteformel und Auflösen nach w ergibt:

$$\frac{w-0}{w-4} : \frac{2+2i-0}{2+2i-4} = \frac{z-0}{z+2} : \frac{i-1-0}{i-1+2} \;\Leftrightarrow\; \frac{w}{w-4} : \frac{i+1}{i-1} = \frac{z}{z+2} : \frac{i-1}{i+1}$$

$$\Rightarrow \quad w(z+2) = z(w-4)\underbrace{\frac{(i+1)^2}{(i-1)^2}}_{=-1} \;\Leftrightarrow\; wz + 2w = 4z - wz \;\Leftrightarrow\; w = \frac{2z}{z+1} =: T(z).$$

b) Eine Probe ergibt, dass $z_0, \ldots, z_3$ auf dem Kreis $|z+1| = 1$ liegen.

Alternativ und ohne Kenntnis des Kreises kann man auch nachprüfen, dass das Doppelverhältnis reell ist:

$$\frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{-1-i}{-1-i+2} : \frac{i-1}{i-1+2} = \frac{(-1-i)(1+i)}{(1-i)(i-1)} = -1 \in \mathbb{R}$$

c) Die Punkte $z_1 = 0$, $z_2 = -2$ und $z_3 = i-1$ liegen auf dem Kreis K. Damit liegen die Punkte $T(z_1) = 0, T(z_2) = 4$ und $T(z_3) = 2+2i$ auf dem Bildkreis $T(K)$.

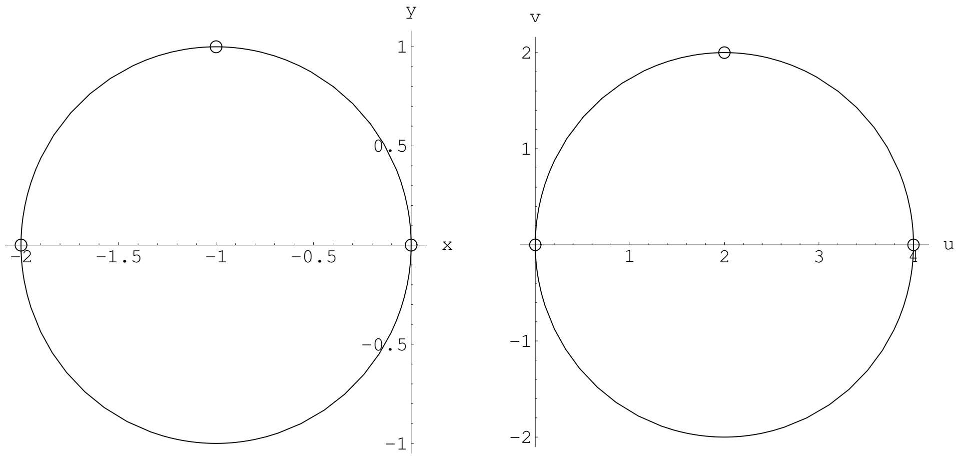


Bild 11: z_1, z_2, z_3 und K $\qquad$ w_1, w_2, w_3 und $T(K)$

Kreissymmetrie

Für zwei Punkte z_1 und z_2, die zum Kreis

$$K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = R\}$$

mit Radius R und Mittelpunkt z_0 symmetrisch liegen gilt:

a) Ein Punkt z_1 mit $|z_1 - z_0| \leq R$ ist symmetrisch zu genau einem Punkt z_2 mit $|z_2 - z_0| \geq R$.

b) Gilt $|z_1 - z_0| = R$ für einen Punkt z_1, so ist er zu sich selbst symmetrisch, d.h. es gilt $z_1 = z_2$.

c) $z_1 = z_0$ ist symmetrisch zu $z_2 = \infty$.

d) Es gilt $(z_1 - z_0)(\bar{z}_2 - \bar{z}_0) = R^2$.

e) Ein Möbius-Transformation **erhält die Symmetrie** zu verallgemeinerten Kreisen.

Aufgabe 12:

Gesucht ist eine Möbius-Transformation $w = T(z)$ mit $T(1 + i) = -1 + i$ und $T(i) = 0$, die die Kreisscheibe $|z - 1 - i| \leq 1$ auf die Halbebene $\mathrm{Im}(w) \geq \mathrm{Re}(w)$ abbildet.

Lösung:

Die Lösungsidee besteht darin, dass der die Kreisscheibe berandende Kreis

$$K := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1 - i| = 1\}$$

durch T auf die Winkelhalbierende $\mathrm{Im}(w) = \mathrm{Re}(w)$ abgebildet wird.

$z_2 = i$ liegt auf dem Kreis K.

Da $T(i) = w_2 = 0$ gilt, ist der Bildkreis $T(K)$ ein Kreis durch den Nullpunkt.

Der Mittelpunkt $z_1 = 1 + i$ von K wird auf $w_1 = -1 + i$ abgebildet. Der bezüglich K zu z_1 symmetrische Punkt $z_3 = \infty$ wird auf den zur Winkelhalbierenden symmetrischen Punkt $w_3 = 1 - i$ abgebildet.

Damit wird der Kreis $|z - 1 - i| = 1$ auf die Winkelhalbierende abgebildet.

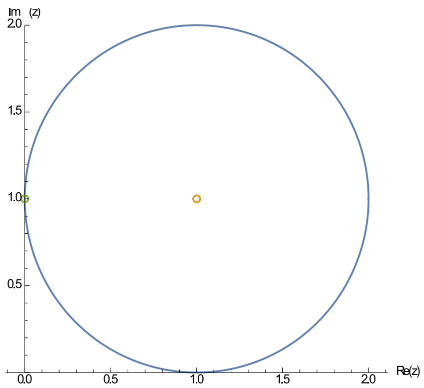
Die Möbius-Transformation $w = T(z)$ ergibt sich dann aus der Dreipunkteformel

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2}.$$

Man erhält

$$\frac{z - (1+i)}{z - i} : \frac{z_3 - (1+i)}{z_3 - i}\bigg|_{z_3 \to \infty} = \frac{w - (-1+i)}{w - 0} : \frac{1 - i - (-1+i)}{1 - i - 0}$$

$$\Rightarrow \frac{z - 1 - i}{z - i} = \frac{w + 1 - i}{2w} \Rightarrow w = T(z) = \frac{(1-i)(z-i)}{z - 2 - i}$$



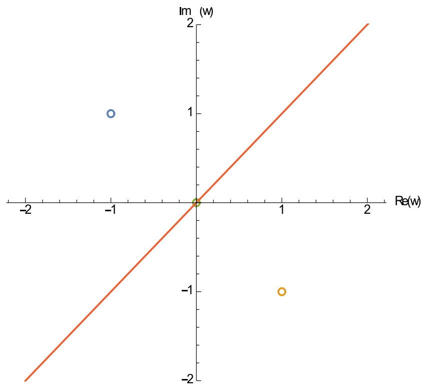


Bild 12 a): K mit z_1 und z_2 **Bild 12 b):** $T(K)$ mit w_1, w_2 und w_3

Da $z_1 = 1 + i$ auf $w_1 = -1 + i$ oberhalb der Winkelhalbierenden abgebildet wird, ist aus Stetigkeitsgründen das Bild der Kreisscheibe $|z - 1 - i| \leq 1$ die Halbebene oberhalb der Winkelhalbierenden.