Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2023**
Dr. K. Rothe

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 3

Elementare komplexe Funktionen:

Mit $z = x + iy = re^{i\varphi}$ und $z_0 = x_0 + iy_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$, sowie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ erhält man

Verschiebung um den Vektor (x_0, y_0):

$$f(z) = z + z_0 = (x + x_0) + i(y + y_0)$$

Drehung um den Winkel φ_0 und **Streckung** um den Faktor r_0:

$$f(z) = z_0 \cdot z = (r_0 r)e^{i(\varphi+\varphi_0)}$$

quadratische Funktion:

(Radius quadrieren und Winkel verdoppeln)

$$f(z) = z^2 = \left(re^{i\varphi}\right)^2 = r^2 e^{i(2\varphi)}$$

Hauptwert der Wurzelfunktion

Der Hauptwert der Umkehrfunktion zu $f(z) = z^2 = w$ wird für $w = re^{i\varphi}$ mit $r > 0$ und $-\pi < \varphi < \pi$ definiert durch

$$f^{-1}(w) = \sqrt{w} := r^{1/2} e^{i\varphi/2}\,.$$

Aufgabe 5:

a) Man bestimme das Bild von

$$Q := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1\ ,\ 0 \leq \mathrm{Im}(z) \leq 1\}$$

unter der durch $f(z) = iz^2 + 2$ definierten Abbildung.

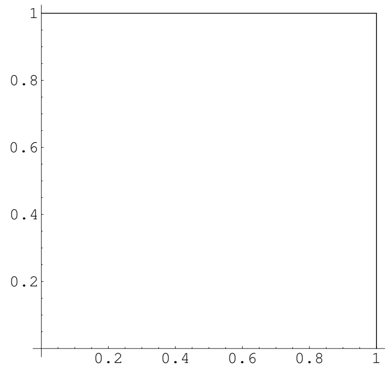

Bild 5.1 $Q := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1\ ,\ 0 \leq \mathrm{Im}(z) \leq 1\}$

f als Hintereinanderausführung $\qquad f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$

mit

$$f_1(z) = z^2\ , \quad f_2(u) = iu\ , \quad f_3(v) = v + 2$$

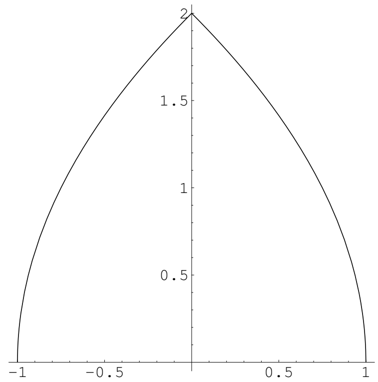

Bild 5.2 $f_1(Q)$

Mit der Funktion $f_1(z) = z^2$ werden die Ränder von Q folgendermaßen abgebildet:

(i) $c_1(x) = x$ mit $x \in [0, 1]$: $f_1(c_1(x)) = x^2$,
damit wird das Intervall $[0, 1]$ in sich abgebildet.

(ii) $c_2(y) = 1 + iy$ mit $y \in [0, 1]$
$\Rightarrow \quad f_1(c_2(y)) = (1 + iy)^2 = 1 - y^2 + i2y$
(nach unten geöffnete Parabel bzgl. der y-Achse)

(iii) $c_3(x) = x + i$ mit $x \in [0, 1]$
$\Rightarrow \quad f_1(c_3(x)) = (x + i)^2 = x^2 - 1 + i2x$
(nach oben geöffnete Parabel bzgl. der y-Achse)

(iv) $c_4(y) = iy$ mit $y \in [0, 1]$: $f_1(c_4(y)) = (iy)^2 = -y^2$,
damit ist das Bild von c_4 das Intervall $[-1, 0]$.

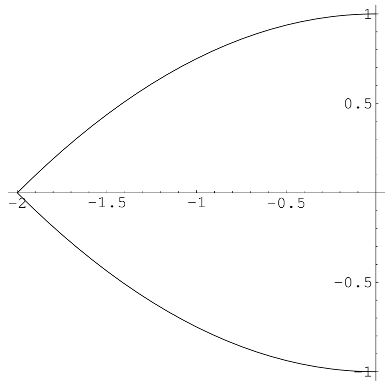

Bild 5.3 $f_2(f_1(Q))$

Die Funktion $f_2(u) = iu$ bewirkt eine Drehung um den Winkel $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$

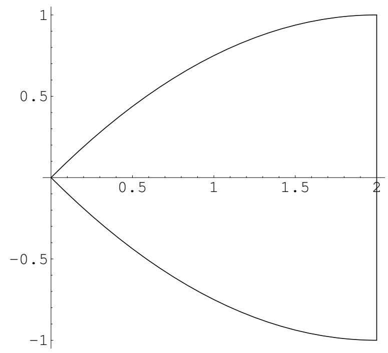

Bild 5.4 $f(Q) = f_3(f_2(f_1(Q)))$

Die Funktion $f_3(v) = v + 2$ bewirkt eine Verschiebung in Richtung der positiven x-Achse um den Wert 2.

Elementare komplexe Funktionen: (Fortsetzung)

Exponentialfunktion:

$$f(z) = \exp(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$

Hauptwert der Logarithmusfunktion

Der Hauptwert der Umkehrfunktion zu $f(z) = e^z = w$ wird für $w = re^{i\varphi}$ mit $r > 0$ und $-\pi < \varphi = \arg(w) < \pi$ definiert durch

$$f^{-1}(w) = \log(w) := \ln|w| + i\arg(w)\,.$$

Aufgabe 6:

a) Gegeben seien $z_1 = 3 + \frac{\pi i}{4}$ und $z_2 = 1 - \frac{\pi i}{2}$.

Man berechne

$$\exp(z_1)\ ,\ \exp(z_2) \quad \text{und} \quad \exp(z_1 + z_2)$$

in kartesischen Koordinaten und bestätige an diesem Beispiel die Gültigkeit der Funktionalgleichung der e-Funktion in $\mathbb{C}$:

$$\exp(z_1) \cdot \exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)\ .$$

$$\begin{aligned}
\exp(z_1) &= \exp\left(3 + \frac{\pi i}{4}\right) \\
&= e^3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= \frac{e^3\sqrt{2}}{2} + i\frac{e^3\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\exp(z_2) &= \exp\left(1 - \frac{\pi i}{2}\right) \\
&= e\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = -ie
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\exp(z_1 + z_2) &= \exp\left(4 - \frac{\pi i}{4}\right) \\
&= e^4\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= \frac{e^4\sqrt{2}}{2} - i\frac{e^4\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}
\exp(z_1)\exp(z_2) &= \left(\frac{e^3\sqrt{2}}{2} + i\frac{e^3\sqrt{2}}{2}\right)(-ie) \\
&= \frac{e^4\sqrt{2}}{2} - i\frac{e^4\sqrt{2}}{2} = \exp(z_1 + z_2)\,.
\end{aligned}$$

b) Für den Hauptwert des komplexen Logarithmus log und

$$z_1 = -i\,, \quad z_2 = -2i$$

berechne man

$$\log(z_1)\,,\ \log(z_2) \quad \text{und} \quad \log(z_1 z_2),$$

falls dies möglich ist.

Der Hauptwert für $\ln z$ ist definiert für $-\pi < \arg z < \pi$ durch

$$\log(z) = \ln|z| + i\arg(z)\,.$$

$$\ln(z_1) = \log(-i) = \ln|-i| + i\arg(-i) = \ln(1) - i\pi/2 = -i\pi/2$$

$$\ln(z_2) = \log(-2i) = \ln|-2i| + i\arg(-2i) = \ln(2) - i\pi/2$$

$$z_1 z_2 = -i(-2i) = -2 = 2e^{-\pi i}$$

Damit liegt $z_1 z_2$ nicht im Definitionsbereich des Hauptwertes und

$$\log(z_1 z_2) = \ln(-2)$$

kann im Komplexen wie im Reellen nicht berechnet werden.

Elementare komplexe Funktionen: (Fortsetzung)

trigonometrische Funktionen:

$$\sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\,, \quad \cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\,, \quad \tan(z) := \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$$

hyperbolische Funktionen:

$$\sinh(z) := \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}\,, \quad \cosh(z) := \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}\,, \quad \tanh(z) := \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)}$$

Joukowski-Funktion:

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

Aufgabe 7:

Die sin-Funktion wird im Komplexen definiert durch

$$\sin(z) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \ .$$

Man berechne Real- und Imaginärteil von $\sin(z)$ und bestimme alle Lösungen von $\sin(z) = 2$.

Mit $z = x + iy$ gilt:

$$\begin{aligned}
\sin(z) &= \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = -\frac{i}{2}\left(e^{-y+ix} - e^{y-ix}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-ie^{-y}(\cos(x) + i\sin(x)) + ie^{y}(\cos(x) - i\sin(x))\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sin(x)(e^{y} + e^{-y}) + i\cos(x)(-e^{-y} + e^{y})\right) \\
&= \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)
\end{aligned}$$

$$2 = \sin(z) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$$

$$\Rightarrow \quad \cos(x)\sinh(y) = 0$$

1. Fall: $\sinh(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$

$$\Rightarrow \quad \sin(x)\cosh(0) = \sin(x) = 2$$

besitzt keine Lösung.

2.Fall: $\cos(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\cosh(y) = (-1)^k \cosh(y) = 2$$

$$\Rightarrow \quad \cosh(y) = 2 \text{ und } k = 2n \quad \Rightarrow \quad y = \pm\text{arcosh}(2)$$

$$\Rightarrow \quad z_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \pm i\,\text{arcosh}(2)\,, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Aufgabe 8:

Gegeben sei die Joukowski-Funktion

$$w = f(z) := \frac{1}{2}\left(\frac{z}{3} + \frac{3}{z}\right).$$

a) Man bestimme folgende Bilder unter f

(i) der Kreise $|z| = 3$

Polardarstellung $\quad z = 3e^{i\varphi},\ 0 \leq \varphi < 2\pi$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2}\left(\frac{3e^{i\varphi}}{3} + \frac{3}{3e^{i\varphi}}\right) \\ &= \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \\ &= \cos\varphi \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

(ii) der Halbstrahl $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) > 0$,

Polardarstellung $z = re^{i\pi/4}$, $0 < r < \infty$

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2}\left(\frac{re^{i\pi/4}}{3} + \frac{3}{re^{i\pi/4}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{r}{3}(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)) + \frac{3}{r}(\cos(\pi/4) - i\sin(\pi/4)) \right. \\
&= \underbrace{\left(\frac{r}{6} + \frac{3}{2r}\right)\cos(\pi/4)}_{=u} + i\underbrace{\left(\frac{r}{6} - \frac{3}{2r}\right)(\sin\pi/4)}_{=v}.
\end{aligned}$$

$u = \operatorname{Re}(f)$ und $v = \operatorname{Im}(f)$ erfüllen die Hyperbelgleichung

$$\frac{u^2}{\cos^2(\pi/4)} - \frac{v^2}{\sin^2(\pi/4)} = \left(\frac{r}{6} + \frac{3}{2r}\right)^2 - \left(\frac{r}{6} - \frac{3}{2r}\right)^2 = 1\,.$$

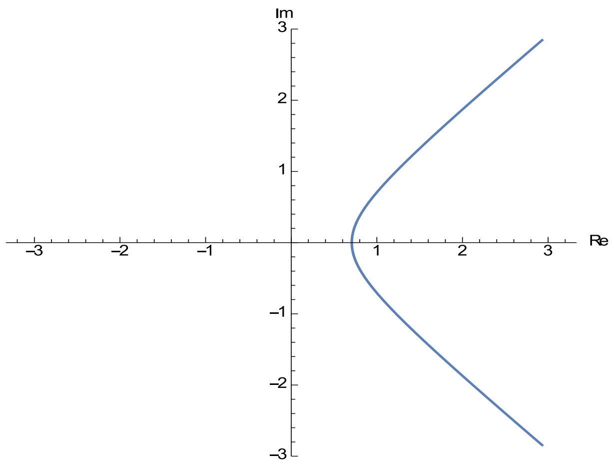

Bild 8 a)(ii): Hyperbel

Mathematica Plot-Befehl

```
ParametricPlot[{Sqrt[2] Cosh[t]/2,
Sqrt[2] Sinh[t]/2}, {t, -2.1, 2.1},
AxesLabel -> {"Re", "Im"}, PlotRange -> {-3, 3}]
```

Mit

$$\cosh(t) = \left(\frac{r}{6} + \frac{3}{2r}\right) \, , \, \sinh(t) = \left(\frac{r}{6} - \frac{3}{2r}\right)$$

entspricht der Radius $r = 3$ dem Wert $t = 0$.

(iii) Halbstrahl $\operatorname{Re}(z) = 0 \, , \, \operatorname{Im}(z) > 0$.

Die Polardarstellung $z = re^{i\pi/2} = ir$, $0 < r < \infty$ des Halbstrahls führt im Bild auf die imaginäre Achse:

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{ir}{3} + \frac{3}{ir}\right) = i\underbrace{\left(\frac{r}{6} - \frac{3}{2r}\right)}_{=t} \quad \text{mit} \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) Man berechne die Umkehrfunktion $z = f^{-1}(w)$ für $|z| > 3$.

Die Umkehrfunktion von f ergibt sich durch Auflösen von $w = f(z)$ nach z:

$$w = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{3} + \frac{3}{z}\right) \quad \Rightarrow \quad 6wz = z^2 + 9$$

$$\Rightarrow \; z^2 - 6wz + 9 = (z - 3w)^2 - 9w^2 + 9 = 0$$

$$\Rightarrow \; (z - 3w)^2 = 9(w^2 - 1)$$

$$\Rightarrow \; z = f^{-1}(w) = 3(w + \sqrt{w^2 - 1})$$

Der Zweig der Wurzelfunktion $\sqrt{w^2 - 1}$ ist dabei so zu wählen, dass $|z| > 3$ gilt.