Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2023**
Dr. K. Rothe

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 3

Elementare komplexe Funktionen:

Mit $z = x + iy = re^{i\varphi}$ und $z_0 = x_0 + iy_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$, sowie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ erhält man

Verschiebung um den Vektor (x_0, y_0):

$$f(z) = z + z_0 = (x + x_0) + i(y + y_0)$$

Drehung um den Winkel φ_0 und **Streckung** um den Faktor r_0:

$$f(z) = z_0 \cdot z = (r_0 r)e^{i(\varphi+\varphi_0)}$$

quadratische Funktion: (Radius quadrieren und Winkel verdoppeln)

$$f(z) = z^2 = \left(re^{i\varphi}\right)^2 = r^2 e^{i(2\varphi)}$$

Hauptwert der Wurzelfunktion

Der Hauptwert der Umkehrfunktion zu $f(z) = z^2 = w$ wird für $w = re^{i\varphi}$ mit $r > 0$ und $-\pi < \varphi < \pi$ definiert durch

$$f^{-1}(w) = \sqrt{w} := r^{1/2} e^{i\varphi/2} \,.$$

Aufgabe 5:

Man bestimme das Bild von $Q := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1\ ,\ 0 \leq \mathrm{Im}(z) \leq 1\}$ unter der durch $f(z) = iz^2 + 2$ definierten Abbildung.

Lösung:

a)

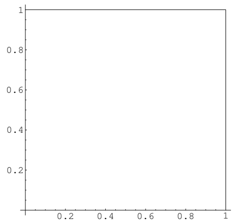

Bild 5.1 $Q := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1\ ,\ 0 \leq \mathrm{Im}(z) \leq 1\}$

Die Abbildung $f(z) = iz^2 + 2$ wird interpretiert als Hintereinanderausführung $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ mit $f_1(z) = z^2\ ,\quad f_2(u) = iu$ und $f_3(v) = v + 2$.

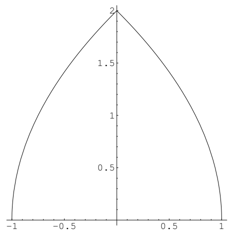

Bild 5.2 $f_1(Q)\}$

Mit der Funktion $f_1(z) = z^2$ werden die Ränder von Q folgendermaßen abgebildet:

(i) $c_1(x) = x$ mit $x \in [0,1]$: $\quad f_1(c_1(x)) = x^2$,
damit wird das Intervall $[0,1]$ in sich abgebildet.

(ii) $c_2(y) = 1 + iy$ mit $y \in [0,1] \Rightarrow \quad f_1(c_2(y)) = (1+iy)^2 = 1 - y^2 + i2y$
(nach unten geöffnete Parabel bzgl. der y-Achse)

(iii) $c_3(x) = x + i$ mit $x \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad f_1(c_3(x)) = (x+i)^2 = x^2 - 1 + i2x$
(nach oben geöffnete Parabel bzgl. der y-Achse)

(iv) $c_4(y) = iy$ mit $y \in [0,1]$: $\quad f_1(c_4(y)) = (iy)^2 = -y^2$,
damit ist das Bild von c_4 das Intervall $[-1,0]$.

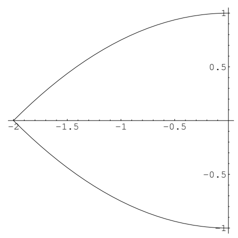

Bild 5.3 $f_2(f_1(Q))\}$

Die Funktion $f_2(u) = iu$ bewirkt eine Drehung um den Winkel $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$

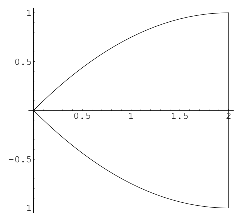

Bild 5.4 $f(Q) = f_3(f_2(f_1(Q)))\}$

Die Funktion $f_3(v) = v + 2$ bewirkt eine Verschiebung in Richtung der positiven x-Achse um den Wert 2.

Elementare komplexe Funktionen: (Fortsetzung)

Exponentialfunktion:

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Hauptwert der Logarithmusfunktion

Der Hauptwert der Umkehrfunktion zu $f(z) = e^z = w$ wird für $w = re^{i\varphi}$ mit $r > 0$ und $-\pi < \varphi = \arg w < \pi$ definiert durch

$$f^{-1}(w) = \ln w = \ln |w| + i \arg w \,.$$

Aufgabe 6:

a) Gegeben seien $z_1 = 3 + \dfrac{\pi i}{4}$ und $z_2 = 1 - \dfrac{\pi i}{2}$. Man berechne

$$\exp(z_1)\ ,\ \exp(z_2) \quad \text{und} \quad \exp(z_1 + z_2)$$

in kartesischen Koordinaten und bestätige an diesem Beispiel die Gültigkeit der Funktionalgleichung der e-Funktion in $\mathbb{C}$:

$$\exp(z_1) \cdot \exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)\ .$$

b) Für den Hauptwert des komplexen Logarithmus ln und $z_1 = -i$ und $z_2 = -2i$ berechne man

$$\ln(z_1)\ ,\ \ln(z_2) \quad \text{und} \quad \ln(z_1 z_2),$$

falls dies möglich ist.

Lösung:

a) $$\exp(z_1) = \exp\left(3 + \frac{\pi i}{4}\right) = e^3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{e^3\sqrt{2}}{2} + i\frac{e^3\sqrt{2}}{2}$$

$$\exp(z_2) = \exp\left(1 - \frac{\pi i}{2}\right) = e\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = -ie$$

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp\left(4 - \frac{\pi i}{4}\right) = e^4\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{e^4\sqrt{2}}{2} - i\frac{e^4\sqrt{2}}{2}$$

Damit erhält man

$$\exp(z_1)\exp(z_2) = \left(\frac{e^3\sqrt{2}}{2} + i\frac{e^3\sqrt{2}}{2}\right)(-ie) = \frac{e^4\sqrt{2}}{2} - i\frac{e^4\sqrt{2}}{2} = \exp(z_1 + z_2)\ .$$

b) Der Hauptwert $\ln z$ des Logarithmus ist definiert für $-\pi < \arg z < \pi$ durch

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z\ .$$

$\ln(z_1) = \ln(-i) = \ln|-i| + i\arg(-i) = \ln 1 - i\pi/2 = -i\pi/2$

$\ln(z_2) = \ln(-2i) = \ln|-2i| + i\arg(-2i) = \ln 2 - i\pi/2$

$z_1 z_2 = -i(-2i) = -2 = 2e^{-\pi i}$

Damit liegt $z_1 z_2$ nicht im Definitionsbereich des Hauptwertes und $\ln(z_1 z_2) = \ln(-2)$ kann nicht berechnet werden.

Elementare komplexe Funktionen: (Fortsetzung)

trigonometrische Funktionen:

$$\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\,, \quad \cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\,, \quad \tan z := \frac{\sin z}{\cos z}$$

hyperbolische Funktionen:

$$\sinh z := \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}\,, \quad \cosh z := \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}\,, \quad \tanh z := \frac{\sinh z}{\cosh z}$$

Joukowski-Funktion:

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

Die Joukowski-Funktion ist nicht bijektiv, denn es gilt $f(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$.

Aufgabe 7:

Die sin-Funktion wird im Komplexen definiert durch

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) .$$

Man berechne Real- und Imaginärteil von $\sin z$ und bestimme alle Lösungen von $\sin z = 2$.

Lösung:

Mit $z = x + iy$ gilt:

$$\begin{aligned}
\sin z &= \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = -\frac{i}{2}\left(e^{-y+ix} - e^{y-ix}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-ie^{-y}(\cos x + i\sin x) + ie^{y}(\cos x - i\sin x)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sin x(e^{y} + e^{-y}) + i\cos x(-e^{-y} + e^{y})\right) \\
&= \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y
\end{aligned}$$

$$2 = \sin z = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y \quad \Rightarrow \quad \cos x\sinh y = 0$$

1\. Fall: $\sinh y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin x\cosh 0 = \sin x = 2$
besitzt keine Lösung.

2.Fall: $\cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\cosh y = (-1)^k\cosh y = 2$
$\Rightarrow \quad \cosh y = 2$ und $k = 2n \quad \Rightarrow \quad y = \pm\text{arcosh } 2$

$$\Rightarrow \quad z_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \pm i\text{arcosh } 2\,, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Aufgabe 8:

Gegeben sei die Joukowski-Funktion $w = f(z) := \frac{1}{2}\left(\frac{z}{3} + \frac{3}{z}\right)$.

a) Man bestimme die Bilder

(i) des Kreises $|z| = 3$,

(ii) des Halbstrahls $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) > 0$,

(iii) des Halbstrahls $\mathrm{Re}(z) = 0$, $\mathrm{Im}(z) > 0$.

b) Man berechne die Umkehrfunktion $z = f^{-1}(w)$ für $|z| > 3$.

Lösung:

a) (i) Mit der Polardarstellung $z = 3e^{i\varphi}$, $0 \le \varphi < 2\pi$ auf dem Kreis $|z| = 3$ erhält man:

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{3e^{i\varphi}}{3} + \frac{3}{3e^{i\varphi}}\right) = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = \cos\varphi \in [-1, 1].$$

(ii) Die Polardarstellung $z = re^{i\pi/4}$, $0 < r < \infty$ des Halbstrahls $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) > 0$ ergibt:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2}\left(\frac{re^{i\pi/4}}{3} + \frac{3}{re^{i\pi/4}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{r}{3}(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4) + \frac{3}{r}(\cos\pi/4 - i\sin\pi/4)\right) \\ &= \underbrace{\left(\frac{r}{6} + \frac{3}{2r}\right)\cos\pi/4}_{=u} + i\underbrace{\left(\frac{r}{6} - \frac{3}{2r}\right)\sin\pi/4}_{=v}. \end{aligned}$$

$u = \mathrm{Re}(f)$ und $v = \mathrm{Im}(f)$ erfüllen die Hyperbelgleichung

$$\frac{u^2}{\cos^2\pi/4} - \frac{v^2}{\sin^2\pi/4} = \left(\frac{r}{6} + \frac{3}{2r}\right)^2 - \left(\frac{r}{6} - \frac{3}{2r}\right)^2 = 1\ .$$

Mathematica Plot-Befehl

```
ParametricPlot[{Sqrt[2] Cosh[t]/2,
Sqrt[2] Sinh[t]/2}, {t, -2.1, 2.1},
AxesLabel -> {"Re", "Im"}, PlotRange -> {-3, 3}]
```

Mit

$$\cosh(t) = \left(\frac{r}{6} + \frac{3}{2r}\right) \;, \quad \sinh(t) = \left(\frac{r}{6} - \frac{3}{2r}\right)$$

entspricht der Radius $r = 3$ dem Wert $t = 0$.

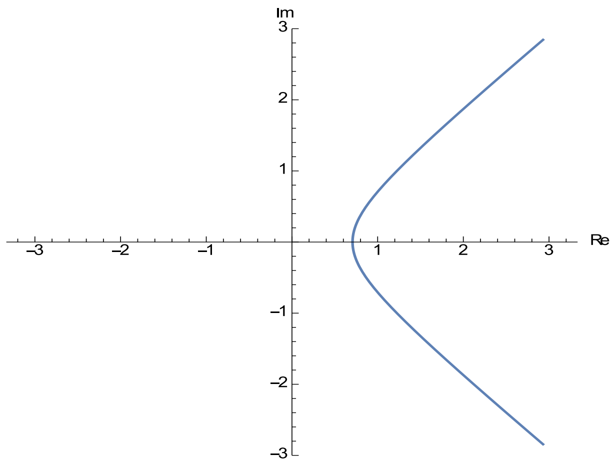

Bild 8 a)(ii): Hyperbel

(iii) Aus der Polardarstellung $z = re^{i\pi/2} = ir$, $0 < r < \infty$ des Halbstrahls $\mathrm{Re}(z) = 0$, $\mathrm{Im}(z) > 0$ folgt:

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{ir}{3} + \frac{3}{ir}\right) = i\underbrace{\left(\frac{r}{6} - \frac{3}{2r}\right)}_{=t} \quad \text{mit} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Die Polardarstellung führt im Bild also auf die imaginäre Achse.

b) Die Joukowski-Funktion ist nicht bijektiv, denn es gilt $f\left(\frac{9}{z}\right) = f\,(z)$.

Die Umkehrfunktion von f ergibt sich durch Auflösen von $w = f(z)$ nach z:

$$w = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{3} + \frac{3}{z}\right) \;\Rightarrow\; 6wz = z^2 + 9$$

$$\Rightarrow\; z^2 - 6wz + 9 = (z - 3w)^2 - 9w^2 + 9 = 0 \;\Rightarrow\; (z - 3w)^2 = 9(w^2 - 1)$$

$$\Rightarrow\; z = f^{-1}(w) = 3(w + \sqrt{w^2 - 1})$$

Für $\sqrt{w^2 - 1}$ ist dabei der Zweig zu wählen, für den $|z| > 3$ gilt.