Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2023**
Dr. K. Rothe

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 2

Zahlen in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$:

kartesische Koordinaten für $z \in \mathbb{C}$: $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$

imaginäre Einheit	$i := \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1$
Realteil	$\mathrm{Re}(z) := x,$
Imaginärteil	$\mathrm{Im}(z) := y,$
Konjugation	$\bar{z} := x - iy$
Addition	$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
Multiplikation	$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$
Betrag	$\lvert z\rvert := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2},$

Formel von Euler: für $x \in \mathbb{R}$ $e^{ix} := \cos x + i \sin x$

Mit Hilfe der Additionstheoreme trigonometrischer Funktionen erhält man

$$\begin{aligned}
e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2} &= (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\
&= \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1) \\
&= \cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2) = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}\,.
\end{aligned}$$

Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen (in Polarkoordinaten) ergibt daher

$$z_1 = r_1e^{i\varphi_1}\,,\; z_2 = r_2e^{i\varphi_2} \quad\Rightarrow\quad z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$

insbesondere gilt $\left(re^{i\varphi}\right)^n = r^ne^{in\varphi}$.

Polarkoordinaten

für $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$: $\quad z = re^{i\varphi}$ mit $\quad r > 0$ und $0 \leq \varphi < 2\pi \quad$ (oder alternativ $\ -\pi < \varphi \leq \pi$)

Radius=Betrag: $r = |z|$, Winkel=Argument: $\varphi = \arg(z)$

Umwandlung komlexer Zahldarstellungen:

a) kartesische Koordinaten $\longrightarrow$ Polarkoordinaten

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$0 \leq \varphi < 2\pi \quad \Rightarrow \quad \varphi = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x} & , \ x > 0 \quad , \ y \geq 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & , \ x = 0, \quad , \ y > 0 \\ \pi + \arctan \dfrac{y}{x} & , \ x < 0 \\ \dfrac{3\pi}{2} & , \ x = 0, \quad , \ y < 0 \\ 2\pi + \arctan \dfrac{y}{x} & , \ x > 0 \quad , \ y < 0 \end{cases}$$

$$-\pi < \varphi \leq \pi \quad \Rightarrow \quad \varphi = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x} & , \ x > 0 \quad , \\ \dfrac{\pi}{2} & , \ x = 0, \quad , \ y > 0 \\ \pi + \arctan \dfrac{y}{x} & , \ x < 0 \qquad y \geq 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & , \ x = 0, \quad , \ y < 0 \\ -\pi + \arctan \dfrac{y}{x} & , \ x < 0 \quad , \ y < 0 \end{cases}$$

b) Polarkoordinaten $\longrightarrow$ kartesische Koordinaten

$$z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad \Rightarrow \quad x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi.$$

Bemerkung:

Gelegentlich wird für den Winkel anstelle von $0 \leq \varphi < 2\pi$ auch $-\pi < \varphi \leq \pi$ verlangt. Dann liefert $\arctan \dfrac{y}{x}$ im 1. und 4. Quadranten das richtige Ergebnis. Für den 2. Quadranten muss π addiert und für den 3. Quadranten π subtrahiert werden.

Berechnung n-ter Wurzeln:

Alle Lösungen $z_k \in \mathbb{C}$ von $z^n = c$ mit $c \in \mathbb{C}$ ergeben sich über die Polarkoordinatendarstellung von $c = re^{i\varphi}$ durch

$$z_k = \sqrt[n]{r}e^{(\varphi+2k\pi)i/n}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

Aufgabe 1:

Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 := \dfrac{(1+2i)^2}{2-i}$ und $z_2 := \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

a) Man ermittle Real- und Imaginärteil von z_1 und die Polardarstellungen von z_1 und z_2.

b) Man bestimme z_2^6 .

c) Man gebe alle Lösungen der Gleichung $(w+z_2)^3 = 1$ in kartesischen Koordinaten an.

Lösung:

a) $$z_1 = \frac{(1+2i)^2}{2-i} = \frac{(-3+4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{-10+5i}{5} = -2+i$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Re}(z_1) = -2, \quad \mathrm{Im}(z_1) = 1$$

$$|z_1| = \sqrt{(-2)^2+1^2} = \sqrt{5}, \quad \arg(z_1) = \pi + \arctan\left(-\frac{1}{2}\right),$$

$$z_1 = \sqrt{5}e^{i\left(\pi - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)},$$

$$z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}(z_2) = \frac{1}{2}, \quad \mathrm{Im}(z_2) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$|z_2| = 1, \quad \arg(z_2) = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}, \quad z_2 = e^{\pi i/3}$$

b) $$z_2^6 = \left(e^{\pi i/3}\right)^6 = e^{6\pi i/3} = e^{2\pi i} = 1$$

c) $$(w+z_2)^3 = 1 = 1e^0$$

$$\Rightarrow \quad w_k = 1^{1/3}e^{(0+2\pi k)i/3} - z_2\,, \quad k = 0,1,2$$

$$w_0 = 1 - z_2 = 1 - \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2},$$

$$w_1 = e^{2\pi i/3} - z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} - \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = -1,$$

$$w_2 = e^{4\pi i/3} - z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} - \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = -1-i\sqrt{3}.$$

Aufgabe 2:

Man skizziere die folgenden Punktmengen in der komplexen Zahlenebene:

a) $\{w \in \mathbb{C} : |w + z_2|^3 = |8i|\}$, mit $z_2 := \sqrt{3} - i$,

b) $\{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \leq \sqrt{2}\}$,

c) $\{z \in \mathbb{C} : 9\mathrm{Re}(z^2) + 13(\mathrm{Im}(z))^2 = 36\}$,

d) $\{z \in \mathbb{C} : 3\pi/2 < \arg(zi) < 2\pi \ , \ 0 < |z|\}$.

Lösung:

a) $|w + z_2|^3 = |8i| = 8 \quad \Leftrightarrow \quad |w + z_2| = 2$

Mit der kartesischen Darstellung $w = u + iv$ erhält man:

$$\begin{aligned} |w + z_2| &= |u + iv + \sqrt{3} - i| = |u + \sqrt{3} + i(v - 1)| \\ &= \sqrt{(u + \sqrt{3})^2 + (v - 1)^2} = 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad (u + \sqrt{3})^2 + (v - 1)^2 = 2^2$$

Die Punktmenge ist ein Kreis mit Mittelpunkt $\left(-\sqrt{3}, 1\right)$ und Radius 2.

b) Mit der kartesischen Darstellung $z = x + iy$ erhält man:

$$|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| = |x| + |y| = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_1 \leq \sqrt{2}$$

Die Punktmenge ist ein Quadrat mit Kantenlänge 2 und den Eckpunkten $(\sqrt{2}, 0), (0, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, 0)$ und $(0, -\sqrt{2})$ im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\sqrt{2}, i\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ und $-i\sqrt{2}$ in $\mathbb{C}$.

c)
$$\begin{aligned} 36 &= 9\mathrm{Re}(z^2) + 13\mathrm{Im}(z)^2 \ = \ 9\mathrm{Re}((x + iy)^2) + 13(\mathrm{Im}(x + iy))^2 \\ &= 9\mathrm{Re}(x^2 - y^2 + i2xy) + 13y^2 \ = \ 9(x^2 - y^2) + 13y^2 \\ &= 9x^2 + 4y^2 \end{aligned}$$

Die Punktmenge wird also durch folgende Ellipse beschrieben:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1 \ .$$

d) $\arg(zi) = \arg(re^{i\varphi}e^{i\pi/2}) = \arg(re^{i(\varphi+\pi/2)}) = \varphi + \pi/2 \ \Rightarrow \ \pi < \varphi < 3\pi/2$

Damit ist die Punktmenge gegeben durch den 3. Quadranten ohne die berandenden Achsen.

komplexwertige Folgen

Eine komplexe Zahlenfolge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann **konvergent** mit **Grenzwert** z^* und man schreibt $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z^*$, wenn gilt

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - z^*| = 0 \, .$$

Aufgabe 3:

Man untersuche die Folge

$$z_0 = 1 + i \, , \quad z_{n+1} = \frac{i}{2}\,(2 - i + z_n)$$

auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert.

Lösung:

Wenn z_n konvergiert, so gilt mit $z^* := \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_{n+1}$:

$$z^* = \frac{i}{2}\,(2 - i + z^*) \quad \Rightarrow \quad z^*\left(1 - \frac{i}{2}\right) = \frac{(2-i)i}{2} \quad \Rightarrow \quad z^* = i.$$

z_n konvergiert, da

$$|z_{n+1} - i| = \left|\frac{i}{2}\,(2 - i + z_n) - i\right| = \left|\frac{i}{2}\right| \left|2 - i + z_n - \frac{i}{i/2}\right| = \frac{1}{2}\,|z_n - i|$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 |z_{n-1} - i| = \ldots = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |z_0 - i| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Stetigkeit bei komplexwertigen Funktionen:

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ (mit $D \subset \mathbb{C}$ offen) ist genau dann **stetig** in $z_0 \in D$, wenn für eine beliebige Zahlenfolge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_n \in D$ und $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ gilt

$$f(z_0) \ = \ \lim_{n\to\infty} f(z_n)\ .$$

Aufgabe 4:

Für eine komplexe Zahlenfolge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zeige man die folgende Äquivalenz:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z^* \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) = \mathrm{Re}(z^*) \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n) = \mathrm{Im}(z^*)\ .$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} z_n = z^* \ &\Leftrightarrow \ 0 = \lim_{n\to\infty} |z_n - z^*| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\mathrm{Re}(z_n - z^*)^2 + \mathrm{Im}(z_n - z^*)^2} \\
&\Leftrightarrow \ \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n - z^*) = 0 \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n - z^*) = 0 \\
&\Leftrightarrow \ \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) = \mathrm{Re}(z^*) \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n) = \mathrm{Im}(z^*)
\end{aligned}$$