Fachbereich Mathematik **WiSe 2023/24**
Prof. Dr. J. Struckmeier

Klausur komplexe Funktionen

4. März 2024

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:																
Vorname:																
Matr.Nr.:																

Stg.:	AIW	CS/CI	ET	GES	IIW	MB	MTB	SB	TM	

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Aufgabe	Punkte	Korrekteur
1		
2		
3		
4		
5		
6		

$\sum =$

Aufgabe 1: (2 Punkte)

Man bestimme für die Exponentialfunktion exp das Bild der Menge D mit Skizze

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq \ln(2)\, ,\; 0 \leq \mathrm{Im}(z) \leq \frac{\pi}{2} \right\} .$$

Aufgabe 2: (2+1+2 Punkte)

a) Man berechne die beiden Punkte z_1 und z_2, die symmetrisch zur imaginären Achse und zum Kreis $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+5| = 3\}$ liegen.

(Tipp: z_1 und z_2 liegen auf der reellen Achse.)

b) Man bestimme alle Möbius-Transformationen T, für die gilt

$$T(z_1) = 0\,, \quad T(z_2) = \infty\,.$$

c) Man bestimme das Bild von K unter T, wenn noch $T(-2) = i$ gilt.

Aufgabe 3: (2+1 Punkte)

Für die durch

$$f(z) = z^2 - \bar{z}^2 + 2 \cdot \mathrm{Re}(z^2) + 3$$

gegebene Funktion f entscheide man (mit Begründung), ob

a) $f(z)$ holomorph ist und

b) $\mathrm{Re}(f(z))$ harmonisch ist.

Aufgabe 4: (1+1 Punkte)

Man berechne die Kurvenintegrale

a) $\displaystyle\int_c \frac{1}{z^2}\,dz$ für $c(\varphi) = e^{i\varphi}$ mit $\pi \le \varphi \le \dfrac{3\pi}{2}$,

b) $\displaystyle\oint_{|z-i|=2} \frac{e^z}{(z+1)^5}\,dz$ mit positiv orientiertem Umlauf von $|z-i| = 2$.

Aufgabe 5: (2+2+1+1 Punkte)

Gegeben sei die durch $f(z) = \dfrac{12}{z^2 + 4}$ definierte Funktion f.

a) Man bestimme den Typ aller Singularitäten von f und berechne die zugehörigen Residuen.

b) Man bestimme und skizziere die Konvergenzbereiche aller Potenzreihenentwicklungen von f um $z_0 = i$.

c) Man gebe die komplexe Partialbruchzerlegung von f an.

d) Man berechne $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{12}{x^2 + 4}\, dx$.

Aufgabe 6: (2 Punkte)

Gegeben sei die Funktion f mit $f(z) = \dfrac{\cos(z) - 1}{z^3}$.

Für f gebe man die um $z_0 = 0$ konvergente Laurent-Reihenentwicklung an, klassifiziere alle Singularitäten und bestimme deren Residuen.