Aufgabe 1: (2 Punkte)

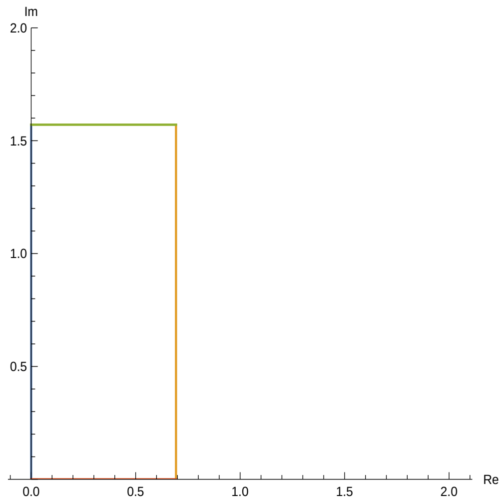
Man bestimme für die Exponentialfunktion exp das Bild der Menge D mit Skizze

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} \,|\, 0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq \ln(2) \,,\; 0 \leq \mathrm{Im}(z) \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Lösung:

(2 Punkte)
Mit $z = x + iy$ erhält man $\exp(z) = e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$ und damit

$$\exp(D) = \left\{ z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \,|\, 1 \leq r \leq 2 \,,\; 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$



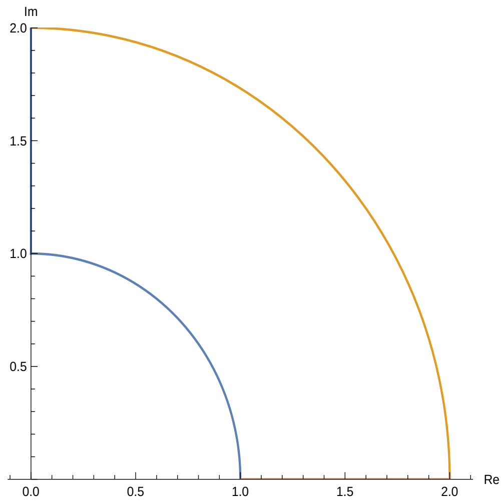


Bild 1 Mengen D und $\exp(D)$

Aufgabe 2: (2+1+2 Punkte)

a) Man berechne die beiden Punkte z_1 und z_2, die symmetrisch zur imaginären Achse und zum Kreis $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+5| = 3\}$ liegen.

(Tipp: z_1 und z_2 liegen auf der reellen Achse.)

b) Man bestimme alle Möbius-Transformationen T, für die gilt

$$T(z_1) = 0\,, \quad T(z_2) = \infty\,.$$

c) Man bestimme das Bild von K unter T, wenn noch $T(-2) = i$ gilt.

Lösung:

a) (2 Punkte)
Symmetrische Punkte zu G und K liegen auf der reellen Achse.

Aus der Symmetrie zu G folgt $z_1 = a$ und $z_2 = -a$ mit $a \in \mathbb{R}$.

Die Symmetrie zu $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+5| = 3\}$ ergibt

$$9 = (z_1+5)(\bar{z}_2+5) = (a+5)(-a+5) = -a^2 + 25 \;\Rightarrow\; a = \pm 4\,.$$

b) (1 Punkt)
Alle Möbius-Transformationen lauten $T(z) = k \cdot \dfrac{z - z_1}{z - z_2}$.

Für $z_1 = 4$ und $z_2 = -4$ erhält man beispielsweise

$$T(z) = k \cdot \frac{z-4}{z+4}\,, \quad k \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

c) (2 Punkte)
Die Punkte z_1 und z_2 liegen symmetrisch zum Kreis K und sind damit auch symmetrisch zum Bildkreis. Dieser ist wegen $T(z_1) = 0$ und $T(z_2) = \infty$ ein Kreis um den Ursprung mit Radius $R = |T(-2)| = |i| = 1$, da $z_3 = -2$ auf K liegt.

Aufgabe 3: (2+1 Punkte)

Für die durch

$$f(z) = z^2 - \bar{z}^2 + 2 \cdot \mathrm{Re}(z^2) + 3$$

gegebene Funktion f entscheide man (mit Begründung), ob

a) $f(z)$ holomorph ist und

b) $\mathrm{Re}(f(z))$ harmonisch ist.

Lösung:

a) (2 Punkte)

f ist holomorph, denn mit $z = x + iy$ gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 - \bar{z}^2 + 2 \cdot \mathrm{Re}(z^2) + 3 \\ &= x^2 - y^2 + i2xy - (x^2 - y^2 - i2xy) + 2(x^2 - y^2) + 3 \\ &= \underbrace{2(x^2 - y^2) + 3}_{=u(x,y)} + i(\underbrace{4xy}_{=v(x,y)}) \, . \end{aligned}$$

Dabei sind u, v stetig partiell differenzierbar und es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$u_x = 4x = v_y \, , \quad v_x = 4y = -u_y \, .$$

b) (1 Punkt)

$u = \mathrm{Re}(f(z))$ ist harmonisch, denn $f(z)$ ist holomorph.

(alternativ $\Delta u = 4 - 4 = 0$)

Aufgabe 4: (1+1 Punkte)

Man berechne die Kurvenintegrale

a) $\displaystyle\int_c \frac{1}{z^2}\,dz$ für $c(\varphi) = e^{i\varphi}$ mit $\pi \le \varphi \le \dfrac{3\pi}{2}$,

b) $\displaystyle\oint_{|z-i|=2} \frac{e^z}{(z+1)^5}\,dz$ mit positiv orientiertem Umlauf von $|z-i| = 2$.

Lösung:

a) (1 Punkt)

Da der Viertelkreis c im Holomorphiegebiet von $\dfrac{1}{z^2}$ verläuft, erhält man mittels Stammfunktion

$$\int_c \frac{1}{z^2}\,dz \;=\; \int_{-1}^{-i} \frac{1}{z^2}\,dz = -\frac{1}{z}\Big|_{-1}^{-i} = \frac{1}{i} + \frac{1}{-1} = -1 - i.$$

Alternativ mit $c(\varphi) = e^{i\varphi}$ und $\pi \le \varphi \le \dfrac{3\pi}{2}$ erhält man

$$\int_c \frac{1}{z^2}\,dz \;=\; \int_{\pi}^{3\pi/2} \frac{ie^{i\varphi}}{e^{2i\varphi}}\,d\varphi \;=\; -\,e^{-i\varphi}\Big|_{\pi}^{3\pi/2} = -(i-(-1)) = -1-i$$

b) (1 Punkt)

Da die Singularität $z_1 = -1$ im Kreis $|z-i| = 2$ liegt,
ergibt die verallgemeinerte Cauchysche Integralformel

$$\oint_{|z-i|=2} \frac{e^z}{(z+1)^5}\,dz = 2\pi i \frac{(e^z)''''}{4!}\Big|_{z=-1} = \frac{\pi i}{12e}.$$

Aufgabe 5: (2+2+1+1 Punkte)

Gegeben sei die durch $f(z) = \dfrac{12}{z^2+4}$ definierte Funktion f.

a) Man bestimme den Typ aller Singularitäten von f und berechne die zugehörigen Residuen.

b) Man bestimme und skizziere die Konvergenzbereiche aller Potenzreihenentwicklungen von f um $z_0 = i$.

c) Man gebe die komplexe Partialbruchzerlegung von f an.

d) Man berechne $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{12}{x^2+4}\,dx$.

Lösung:

a) (2 Punkte)

$$f(z) = \frac{12}{z^2+4} = \frac{12}{(z-2i)(z+2i)}$$

Damit besitzt f Pole 1. Ordnung in $z_1 = 2i$ und $z_2 = -2i$

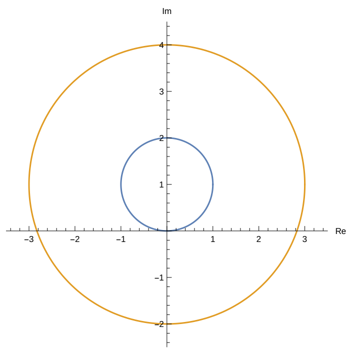
$$\mathrm{Res}(f;2i) = \left.\frac{12}{z+2i}\right|_{z=2i} = \frac{12}{2i+2i} = \frac{3}{i} = -3i \quad ,$$

$$\mathrm{Res}(f;-2i) = \left.\frac{12}{z-2i}\right|_{z=-2i} = \frac{12}{-2i-2i} = -\frac{3}{i} = 3i$$

b) (2 Punkte)

Die Radien der Konvergenzbereiche ergeben sich aus den Abständen von $z_0 = i$ zu den Singularitäten $\pm 2i$ von f

Taylor-Reihe in $|z-i| < 1$,
Laurent-Reihe für $1 < |z-i| < 3$,
Laurent-Reihe für $3 < |z-i|$.



c) (1 Punkt)

$$\begin{aligned} f(z) &= h(z,2i) + h(z,-2i) = \frac{\mathrm{Res}(f;2i)}{z-2i} + \frac{\mathrm{Res}(f;-2i)}{z+2i} \\ &= -\frac{3i}{z-2i} + \frac{3i}{z+2i} \end{aligned}$$

d) (1 Punkt)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{12}{x^2+4}\,dx = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}(f;2i) = 6\pi$$

Aufgabe 6: (2 Punkte)

Gegeben sei die Funktion f mit $f(z) = \dfrac{\cos(z) - 1}{z^3}$.

Für f gebe man die um $z_0 = 0$ konvergente Laurent-Reihenentwicklung an, klassifiziere alle Singularitäten und bestimme deren Residuen.

Lösung:

(1 Punkt)

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{\cos(z) - 1}{z^3} = \frac{1}{z^3}\left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} \mp \cdots - 1\right) \\
&= -\frac{1}{2z} + \frac{z}{4!} - \frac{z^3}{6!} + \frac{z^5}{8!} \mp \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k-3}
\end{aligned}
$$

(1 Punkt)

Die einzige Singularität $z_0 = 0$ ist ein Pol 1.Ordnung mit $\text{Res}(f; 0) = -\dfrac{1}{2}$.