Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Struckmeier

SoSe 2023

Klausur komplexe Funktionen

5. September 2023

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:

Vorname:

Matr.Nr.:

Stg.:	AIW	CS/CI	ET	GES	IIW	MB	MTB	SB	TM	

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Aufgabe	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		
3		
4		
5		
6		

$\sum =$

Aufgabe 1: (2 Punkte)

Man bestimme das Bild von

$$K := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{4} \, , \, |z| \leq 1 \right\}$$

unter der durch $f(z) = z^2 + 1$ definierten Abbildung mit Skizze.

Aufgabe 2: (2+1+2 Punkte)

Gegegeben sei eine Möbius-Transformation $w = T(z)$ mit

$$T(-2i) = 0 \quad \text{und} \quad T(0) = -3.$$

a) Man bestimme T derart, dass die untere Halbebene $\mathrm{Im}(z) \leq 0$ auf die Kreisscheibe

$$K := \{w \in \mathbb{C} \mid |w| \leq R\}$$

abgebildet wird.
(Tipp: $z_1 = -2i$ und $z_2 = 2i$ liegen symmetrisch zur reellen Achse.)

b) Man bestimme den Radius R des Kreises K.

c) Man berechne T.

Aufgabe 3: (1+2 Punkte)

Gegeben sei die durch $u(x, y) = y^2 + 3x - x^2 + e^{-x}\cos(y)$ definierte Funktion.

a) Man zeige, dass u harmonisch ist.

b) Man konstruiere eine Funktion $v(x, y)$, so dass die Funktion $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ mit $z = x + iy$ holomorph wird.

Aufgabe 4: (1+1 Punkte)

Man berechne die Kurvenintegrale

a) $\displaystyle\int_c \frac{1}{z}\, dz$ für $c(\varphi) = e^{i\varphi}$ mit $0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$,

b) $\displaystyle\oint_{|z-1|=1} \frac{\sin(z)}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^3}\, dz$ mit positiv orientiertem Umlauf von $|z-1| = 1$.

Aufgabe 5: (3+2+1 Punkte)

Gegeben sei die durch $f(z) = \dfrac{3}{z-2} + \dfrac{6}{z-5}$ definierte Funktion f.

a) Zum Entwicklungspunkt $z_0 = 2$ berechne man alle Potenzreihenentwicklungen von f und skizziere deren Konvergenzbereiche.

b) Man bestimme den Typ aller Singularitäten von f und gebe die zugehörigen Residuen.

c) Man berechne $\displaystyle\oint_{|z-3|=3} f(z)\,dz$ für die einfach mathematisch positiv durchlaufene Kurve $|z-3| = 3$.

Aufgabe 6: (2 Punkte)

Gegeben sei die Funktion f mit $f(z) = (z-2)^3 \exp\left(\dfrac{1}{z-2}\right)$.

Für f gebe man die um $z_0 = 2$ konvergente Laurent-Reihenentwicklung an, klassifiziere alle Singularitäten und bestimme deren Residuen.