Aufgabe 1: (2 Punkte)

Man bestimme das Bild von

$$K := \left\{ z \in \mathbb{C} \,|\, -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{4} \,,\, |z| \leq 1 \right\}$$

unter der durch $f(z) = z^2 + 1$ definierten Abbildung mit Skizze.

Lösung:

(2 Punkte)
Mit $f_1(z) = z^2 = (re^{i\varphi})^2 = r^2 e^{i2\varphi}$ und $f_2(w) = f_1(z) + 1$ erhält man den rechten Halbkreis um Null vom Radius $r = 1$

$$f_1(K) = K_1 := \left\{ z \in \mathbb{C} \,|\, -\frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{2} \,,\, |z| \leq 1 \right\}$$

und damit den rechten Halbkreis vom Radius $r = 1$ um $w_0 = 1$.

$$f(K) = f_2(K_1) = \left\{ w = z + 1 \in \mathbb{C} \,|\, -\frac{\pi}{2} \leq \arg(w-1) \leq \frac{\pi}{2} \,,\, |w-1| \leq 1 \right\}$$

$$f(K) = f_2(K_1) = \left\{ w = z + 1 \in \mathbb{C} \,|\, -\frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{2} \,,\, |z| \leq 1 \right\}$$

$$= \left\{ w \in \mathbb{C} \,|\, -\frac{\pi}{2} \leq \arg(w) \leq \frac{\pi}{2} \,,\, |w-1| \leq 1 \right\}$$

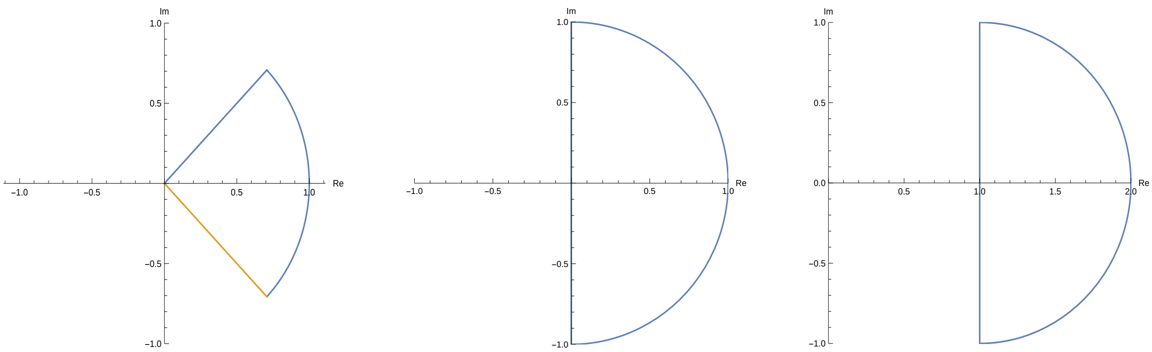

Bild 1 Mengen K, $f_1(K)$, $f(K)$

Aufgabe 2: (2+1+2 Punkte)

Gegegeben sei eine Möbius-Transformation $w = T(z)$ mit

$$T(-2i) = 0 \quad \text{und} \quad T(0) = -3.$$

a) Man bestimme T derart, dass die untere Halbebene $\text{Im}(z) \leq 0$ auf die Kreisscheibe

$$K := \{w \in \mathbb{C} \mid |w| \leq R\}$$

abgebildet wird.

(Tipp: $z_1 = -2i$ und $z_2 = 2i$ liegen symmetrisch zur reellen Achse.)

b) Man bestimme den Radius R des Kreises K.

c) Man berechne T.

Lösung:

a) (2 Punkte)

$z_1 = -2i$ und $z_2 = 2i$ liegen symmetrisch zu $\mathbb{R}$. Damit sind $w_1 = T(z_1)$ und $w_2 = T(z_2)$ symmetrisch zum Bild der reellen Achse. Mit der Wahl von $w_2 = T(z_2) = \infty$ wird die reelle Achse auf einen Kreis um $w_1 = T(-2i) = 0$ abgebildet.

Da $z_1 = -2i$ in der unteren Halbebene liegt, wird diese durch T abgebildet auf die Kreisscheibe

$$K := \{w \in \mathbb{C} \mid |w| \leq R\}.$$

b) (1 Punkt)

Da $0 \in \mathbb{R}$ gilt, liegt $T(0) = -3$ auf dem Bildkreis. Damit gilt $R = |T(0)| = 3$.

c) (2 Punkte)

Die Bedingungen $T(-2i) = 0$ und $T(2i) = \infty$ werden erfüllt durch

$$T(z) = k\frac{z + 2i}{z - 2i}.$$

Mit $T(0) = -3$ erhält man

$$T(0) = k\frac{2i}{-2i} = -3 \quad \Rightarrow \quad k = 3 \quad \Rightarrow \quad w = T(z) = \frac{3(z + 2i)}{z - 2i}.$$

Alternativ erhält man aus der Dreipunkteformel mit $z_1 = -2i, z_2 = 2i$ und $z_3 = 0$ sowie $w_1 = 0, w_2 = \infty$ und $w_3 = -3$

$$\frac{z + 2i}{z - 2i} : \frac{2i}{-2i} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{w - 0}{-3 - 0} \Rightarrow w = \frac{3(z + 2i)}{z - 2i}.$$

Aufgabe 3: (1+2 Punkte)

Gegeben sei die durch $u(x,y) = y^2 + 3x - x^2 + e^{-x}\cos(y)$ definierte Funktion.

a) Man zeige, dass u harmonisch ist.

b) Man konstruiere eine Funktion $v(x,y)$, so dass die Funktion $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ mit $z = x + iy$ holomorph wird.

Lösung:

a) (1 Punkt)

$$\begin{aligned} \Delta u &= (y^2 + 3x - x^2 + e^{-x}\cos(y))_{xx} + (y^2 + 3x - x^2 + e^{-x}\cos(y))_{yy} \\ &= -2 + e^{-x}\cos(y) + 2 - e^{-x}\cos(y) = 0 \end{aligned}$$

b) (2 Punkte)

Für die Holomorphie von $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ in $\mathbb{C}$ müssen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sein:

$$v_y \overset{!}{=} u_x = (y^2 + 3x - x^2 + e^{-x}\cos(y))_x = 3 - 2x - e^{-x}\cos(y)$$

$$\Rightarrow \quad v = 3y - 2xy - e^{-x}\sin(y) + c(x)$$

$$\Rightarrow \quad v_x = -2y + e^{-x}\sin(y) + c'(x)$$

$$\overset{!}{=} -u_y = -(y^2 + 3x - x^2 + e^{-x}\cos(y))_y = -2y + e^{-x}\sin(y)$$

$$\Rightarrow \quad c'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad c(x) = K\,, \quad K \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad v(x,y) = 3y - 2xy - e^{-x}\sin(y) + K$$

Aufgabe 4: (1+1 Punkte)

Man berechne die Kurvenintegrale

a) $\displaystyle\int_c \frac{1}{z}\,dz$ für $c(\varphi) = e^{i\varphi}$ mit $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$,

b) $\displaystyle\oint_{|z-1|=1} \frac{\sin(z)}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^3}\,dz$ mit positiv orientiertem Umlauf von $|z-1| = 1$.

Lösung:

a) (1 Punkt)

Da der Viertelkreis c im Holomorphiegebiet des Hauptwertes von $\ln(z)$ verläuft, erhält man mittels Stammfunktion

$$\int_c \frac{1}{z}\,dz = \int_1^i \frac{1}{z}\,dz = \ln(z)\big|_1^i = \ln|i| + i\frac{\pi}{2} - (\ln|1| + i\cdot 0) = \frac{\pi i}{2}.$$

Alternativ mit $c(\varphi) = e^{i\varphi}$ und $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ erhält man

$$\int_c \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{\pi/2} \frac{ie^{i\varphi}}{e^{i\varphi}}\,d\varphi = i\varphi\big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi i}{2}$$

b) (1 Punkt)

Da die Singularität $z_1 = \frac{\pi}{2}$ im Kreis $|z-1| = 1$ liegt,

ergibt die verallgemeinerte Cauchysche Integralformel

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^3}\,dz = 2\pi i \frac{(\sin z)''}{2!}\bigg|_{z=\frac{\pi}{2}} = -\pi i.$$

Aufgabe 5: (3+2+1 Punkte)

Gegeben sei die durch $f(z) = \dfrac{3}{z-2} + \dfrac{6}{z-5}$ definierte Funktion f.

a) Zum Entwicklungspunkt $z_0 = 2$ berechne man alle Potenzreihenentwicklungen von f und skizziere deren Konvergenzbereiche.

b) Man bestimme den Typ aller Singularitäten von f und gebe die zugehörigen Residuen.

c) Man berechne $\displaystyle\oint_{|z-3|=3} f(z)\,dz$ für die einfach mathematisch positiv durchlaufene Kurve $|z-3| = 3$.

Lösung:

a) (3 Punkte)

$0 < |z-2| < 3$:

$$\frac{6}{z-5} = -\frac{6}{3-(z-2)}$$
$$= -\frac{2}{1-(z-2)/3} = -2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-2)^k}{3^k}$$

$$f(z) = \frac{3}{z-2} - 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-2)^k}{3^k}$$

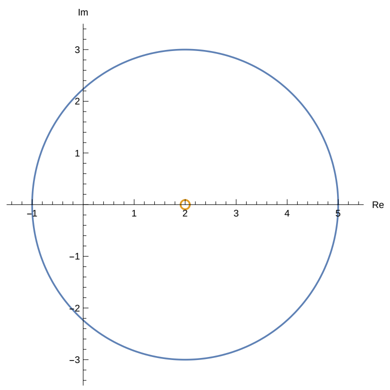

Bild 5: punktierte Kreisscheibe $0 < |z-2| < 3$ und Außengebiet $3 < |z-2|$

$|z-2| > 3$:

$$\frac{6}{z-5} = \frac{6}{z-2-3} = \frac{3}{z-2}\cdot\frac{2}{1-3/(z-2)} = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^{k+1}}{(z-2)^{k+1}}$$

$$f(z) = \frac{3}{z-2} + 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^{k+1}}{(z-2)^{k+1}} = \frac{9}{z-2} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^{k+1}}{(z-2)^{k+1}}$$

b) (2 Punkte)

f besitzt Pole 1. Ordnung in $z_1 = 2$ und $z_2 = 5$

$\mathrm{Res}(f;2) = (z-2)f(z)\big|_{z=2} = 3,$

$\mathrm{Res}(f;5) = (z-5)f(z)\big|_{z=5} = 6.$

c) (1 Punkt)

$$\oint_{|z-3|=3} f(z)\,dz = 2\pi i\cdot(\mathrm{Res}(f;2) + \mathrm{Res}(f;5)) = 18\pi i$$

Aufgabe 6: (2 Punkte)

Gegeben sei die Funktion f mit $f(z) = (z-2)^3 \exp\left(\frac{1}{z-2}\right)$.

Für f gebe man die um $z_0 = 2$ konvergente Laurent-Reihenentwicklung an, klassifiziere alle Singularitäten und bestimme deren Residuen.

Lösung:

(1 Punkt)

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-2)^3 \exp\left(\frac{1}{z-2}\right) = (z-2)^3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-2)^{-k}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-2)^{3-k}}{k!} \\ &= (z-2)^3 + (z-2)^2 + \frac{z-2}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!(z-2)} + \frac{1}{5!(z-2)^2} + \frac{1}{6!(z-2)^3} + \cdots \end{aligned}$$

(1 Punkt)

$z_0 = 2$ ist eine wesentliche Singularität mit $\operatorname{Res}(f; 2) = \frac{1}{4!}$.