

# Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Ingenuin Gasser

Fachbereich Mathematik  
Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg  
Sommersemester 2022

basierend auf dem Foliensatz von Jens Struckmeier Sommersemester 2021

# Inhalte der Vorlesung Komplexe Funktionen.

- 1 Komplexwertige Funktionen einer Variablen.
- 2 Möbius-Transformation.
- 3 Komplexe Differentiation.
- 4 Konforme Abbildungen.
- 5 Komplexe Integration.
- 6 Cauchysche Integralformel und Anwendungen.
- 7 Taylor- und Laurent-Reihenentwicklungen.
- 8 Isolierte Singularitäten und Residuen.
- 9 Residuenkalkül.
- 10 Fourier-Transformationen und partielle Differentialgleichungen.

# Kapitel 1. Komplexe Zahlen

**Ausgangspunkt:** Betrachte die kubische Gleichung

$$x^3 = 3px + 2q$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \checkmark$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

und die Lösungsformel (nach Gerolamo Cardano, 16. Jahrhundert)

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$$

Rafael Bombelli (ebenfalls 16. Jahrhundert) betrachtet die Gleichung

$$x^3 = 15x + 4 \quad p=5 \quad q=2$$

und erhält aus der Lösungsformel

$$q^2 - p^3 = 2^2 - 5^3 = 4 - 125 = -121$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Bombelli definiert die imaginäre Einheit  $i$  mittels  $i^2 = -1$ , die komplexen Zahlen sowie deren Addition und Multiplikation.

# Erste Ideen zur Einführung der komplexen Zahlen.

**Startpunkt:** Verwende **symbolische** Lösung  $i$  für Gleichung  $x^2 + 1 = 0$ , sodass

$$i^2 = -1$$

Die Zahl  $i$  heißt **imaginäre Einheit**.

**Nächster Schritt:** Mit der imaginären Einheit bildet man nun die Zahlenmenge

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Dann führt man die folgenden Rechenoperationen auf  $\mathbb{C}$  ein.

- **Addition**

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \quad \text{für } a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$$

- **Multiplikation**

$$(a_1 + \underline{ib_1}) \cdot (a_2 + \underline{ib_2}) = (a_1 a_2 - \underline{b_1 b_2}) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \quad \text{für } a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$$

Damit besitzt  $\mathbb{C}$  eine algebraische Struktur.

# Prinzipielle Fragen zu den komplexen Zahlen.

- Was ist eigentlich  $i$ ?
- Kann man mit den obigen Rechenoperationen widerspruchsfrei rechnen?
- Sind die Rechenoperationen konsistent mit den bekannten Rechenregeln in  $\mathbb{R}$ ?
- Kann man die komplexen Zahlen anordnen?
- Gibt es alternative Darstellungen für komplexe Zahlen?
- Sind mit Rechenoperationen in  $\mathbb{C}$  geometrische Interpretationen verbunden?
- ...
- Warum beschäftigen wir uns eigentlich mit komplexen Zahlen?
- ... und später mit komplexen Funktionen?
- Gibt es hierzu interessante Anwendungen in den Ingenieurwissenschaften?

# Zur Konstruktion der komplexen Zahlen.

**Ausgangspunkt:** Betrachte die Menge  $\mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  mit **Addition**

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \quad \text{für } a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$$

*neutrales El.  $0 + i0$ , inv. El.  $(a+ib)$  ist  $-a-ib$*

und **Multiplikation**

$$(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \quad \text{für } a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$$

**Beobachtung:** Die Multiplikation ist assoziativ und kommutativ; weiterhin gilt

$$(a, b) \cdot (1, 0) = (a, b) \quad \text{für } (a, b) \in \mathbb{R}^2,$$

d.h.  $(1, 0) \in \mathbb{C}$  ist **neutrales Element der Multiplikation**. Die Gleichung

$$(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0) \quad \text{für } (a, b) \neq (0, 0)$$

besitzt die eindeutige Lösung, das **multiplikative Inverse** zu  $(a, b)$ ,

$$ax + by + i(ay + bx) = 1 + i0$$

$$ax - by = 1$$

$$bx + ay = 0$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(x, y) = \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

*det  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2 \neq 0$  falls  $(a, b) \neq (0, 0)$*



Körper  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  : Abelsche Gruppe bzgl. +  
Kommutativ  
Assoziativ  
neutrales Element  
inverses Element

•  $\subset$  bzgl. Abelsche Gruppe bzgl.  $\cdot$

Distributivgesetz

$$(a_1 b_1) \cdot ((a_2 b_2) + (a_3 b_3)) = (a_1 b_1)(a_2 b_2) + (a_1 b_1)(a_3 b_3)$$

$$\exp(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\boxed{e^{pix} = \cos x + i \sin x}$$

# Der Körper der reellen Zahlen ist angeordnet.

**Bemerkung:** Die reellen Zahlen bilden einen **angeordneten Körper**; es gelten die folgenden **Anordnungsaxiome**.

- Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  gilt entweder  $x > 0$  oder  $x = 0$  oder  $x < 0$ ;
- Für  $x > 0$  und  $y > 0$  gilt  $x + y > 0$ ; 
- Für  $x > 0$  und  $y > 0$  gilt  $xy > 0$ .  $\Rightarrow x^2 = x \cdot x > 0$  

**Frage:** Ist der Körper  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen angeordnet?

**Antwort: NEIN!**

Denn in einem angeordneten Körper sind von Null verschiedene Quadratzahlen positiv. Wäre  $\mathbb{C}$  angeordnet, so folgt aus

$$\underline{0 < 1^2 = 1} \quad \text{und} \quad \underline{0 < i^2 = -1}$$

der Widerspruch  $0 < 1 + (-1) = 0$ . 

# Zur einfacheren Notation der komplexen Zahlen.

## Vereinfachung der Notation:

- Für  $a \in \mathbb{R}$  schreiben wir  $a$  statt  $(a, 0)$ ;
- Die komplexe Einheit  $(0, 1)$  notieren wir mit  $i$ ;
- Damit lässt sich jede komplexe Zahl  $(a, b)$  schreiben als

$$(a, b) = (a, 0) + \overset{(b, 0)}{(0, b)} \cdot (0, 1) = a + b \cdot i = a + ib$$

und es gilt

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

**Fazit:** Wir haben mit  $\mathbb{C}$  einen Körper konstruiert, der  $\mathbb{R}$  umfasst. Die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0$$

ist in  $\mathbb{C}$  lösbar. Die einzigen beiden Lösungen lauten  $\pm i$ .

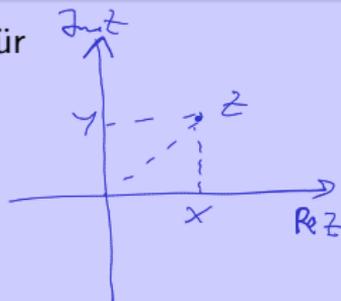
# Realteil und Imaginärteil.

Ab sofort bezeichnen wir komplexe Zahlen mit  $z$  oder  $w$ . Für

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}$$

heißt  $x$  der **Realteil** und  $y$  der **Imaginärteil** von  $z$ , kurz

$$x = \operatorname{Re}(z) \quad \text{und} \quad y = \operatorname{Im}(z)$$



Es gelten die folgenden Rechenregeln

$$\underline{x+iy} + \underline{u+iv} = \underline{x+u} + \underline{i(y+v)}$$

$$\operatorname{Re}(z+w) = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(w) \quad \text{für } z, w \in \mathbb{C}$$

$$\operatorname{Im}(z+w) = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(w) \quad \text{für } z, w \in \mathbb{C}$$

$$a(x+iy) = ax+iaiy \quad \operatorname{Re}(az) = a \operatorname{Re}(z) \quad \text{für } z \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{R}$$

$$(a+i0)(x+iy) = \dots \quad \operatorname{Im}(az) = a \operatorname{Im}(z) \quad \text{für } z \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{R}$$

und weiterhin

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2}$$

für  $z \neq 0$ .

$$(x+iy)(x-iy) =$$

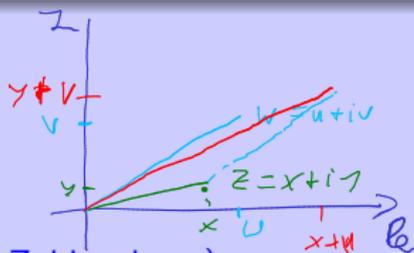
$$x^2+y^2 + i(xy-xy) = x^2+y^2$$

# Die komplexe Zahlenebene.

## Geometrische Veranschaulichung:

Wir stellen  $z = (x, y) \in \mathbb{C}$  als Punkt in der

komplexen Zahlenebene (Gaußsche Zahlenebene)



dar, gegeben durch das kartesische Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^2$ , mit einer reellen Achse,  $\mathbb{R}$ , und einer imaginären Achse,  $i \cdot \mathbb{R}$ .

## Geometrische Veranschaulichung der Addition:

Durch übliche Addition der Ortsvektoren nach der Parallelogrammregel.

**Darstellung** der Addition zweier komplexer Zahlen auf Folie.

# Konjugation komplexer Zahlen.

Ordne durch Spiegelung an reeller Achse jeder komplexen Zahl  $z = x + iy$  mit

$$\bar{z} = x - iy \in \mathbb{C}$$

die konjugiert komplexe Zahl zu.

Es gelten die folgenden Rechenregeln

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \quad \text{für } z, w \in \mathbb{C}$$

$$\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w} \quad \text{für } z, w \in \mathbb{C}$$

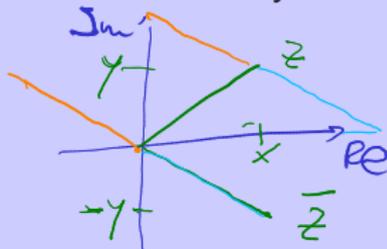
$$\overline{(\bar{z})} = z \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 \quad \text{für } z = x + iy \in \mathbb{C}$$

$$\operatorname{Re}(z) = (z + \bar{z})/2 \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

$$\operatorname{Im}(z) = (z - \bar{z})/2i \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

Insbesondere gilt  $z = \bar{z}$  genau dann, wenn  $z \in \mathbb{R}$ .

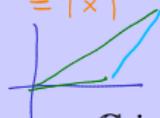


# Die Betragsfunktion.

Setze

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{für } z = x + iy \in \mathbb{C}$$

$$z = x \quad |z| = \sqrt{x^2} = |x|$$



für den **Betrag** von  $z$  sowie  $|z - w|$  für den **Abstand** zweier Zahlen  $z, w \in \mathbb{C}$  in der komplexen Zahlenebene.

- Somit stellt  $|z| = |z - 0|$  den euklidischen Abstand von  $z$  zum Ursprung dar.
- Für  $z \in \mathbb{R}$  stimmt  $|z|$  mit dem (üblichen) Betrag für reelle Zahlen überein.
- Es gelten die folgenden Abschätzungen.

$$-|z| \leq \operatorname{Re}(z) \leq |z| \quad \text{und} \quad -|z| \leq \operatorname{Im}(z) \leq |z| \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$



**Satz:** Die Betragsfunktion liefert eine **Norm** auf  $\mathbb{C}$ , denn es gelten die Relationen

- ①  $|z| \geq 0$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  und  $|z|$  genau dann, wenn  $z = 0$ ;
- ②  $|z + w| \leq |z| + |w|$  für alle  $z, w \in \mathbb{C}$  (**Dreiecksungleichung**);
- ③  $|zw| = |z| \cdot |w|$  für alle  $z, w \in \mathbb{C}$ .

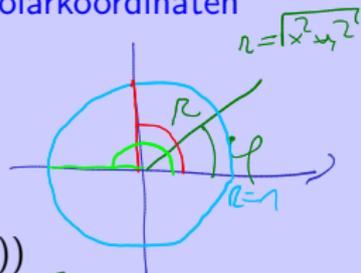
# Die Eulersche Formel.

In der komplexen Zahlenbene gilt für  $z = x + iy$  mit den **Polarkoordinaten**

$$(x, y) = |z|(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$$

die **Eulersche Formel**

$$z = |z| \exp(i\varphi) \stackrel{!}{=} |z|(\underbrace{\cos(\varphi)}_{\operatorname{Re} z} + i \underbrace{\sin(\varphi)}_{\operatorname{Im} z})$$



wobei  $\varphi \in [0, 2\pi)$  für  $z \neq 0$  den (eindeutigen) Winkel zwischen der positiven reellen Achse und dem Strahl von 0 durch  $z = (x, y)$  darstellt.

Der Winkel  $\varphi \in [0, 2\pi)$  wird ebenso als **Argument** von  $z \neq 0$  bezeichnet, kurz

$$\varphi = \arg(z) \in [0, 2\pi)$$

**Beispiel:**  $i = (0, 1) = \exp(i\pi/2)$ ,  $-1 = i^2 = \exp(i\pi)$ , somit gilt  $e^{i\pi} + 1 = 0$ .

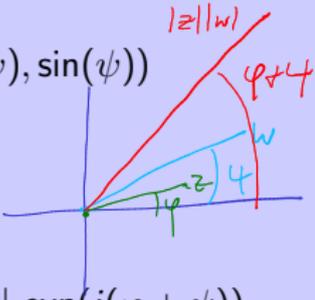
$$= \exp\frac{i\pi}{2} \cdot \exp\frac{i\pi}{2}$$

# Zur Geometrie der Multiplikation und Division.

Mit der Verwendung von Polarkoordinaten lässt sich die Multiplikation zweier komplexer Zahlen  $z, w \in \mathbb{C}$  als **Drehstreckung** in der komplexen Zahlenebene interpretieren, denn für

$$z = |z| (\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \quad \text{und} \quad w = |w| (\cos(\psi), \sin(\psi))$$

gilt

$$\begin{aligned} z \cdot w &= |z| \cdot |w| (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)(\cos(\psi) + i \sin(\psi))) \\ &= |z| \cdot |w| (\underbrace{\cos(\varphi + \psi)}_{\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi} + i \underbrace{\sin(\varphi + \psi)}_{\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi}) = |z| \cdot |w| \exp(i(\varphi + \psi)) \end{aligned}$$


bzw. mit der Eulerschen Formel

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \exp(i\varphi) \exp(i\psi) = |z| \cdot |w| \exp(i(\varphi + \psi))$$

Für die Division zweier komplexer Zahlen  $z, w \in \mathbb{C}$  mit  $z \neq 0$  gilt analog

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} \exp(i(\varphi - \psi)) = \frac{|z|}{|w|} (\cos(\varphi - \psi) + i \sin(\varphi - \psi))$$

# Potenzen und Einheitswurzeln.

Für die  $n$ -te Potenz  $z^n$  von  $z \in \mathbb{C}$  gilt die Darstellung

$$z^n = (|z| \exp(i\varphi))^n = |z|^n \exp(in\varphi) = |z|^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$$

Die Gleichung

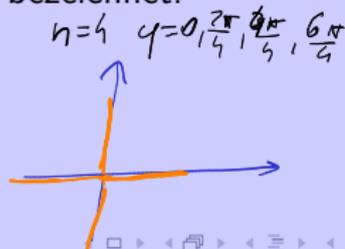
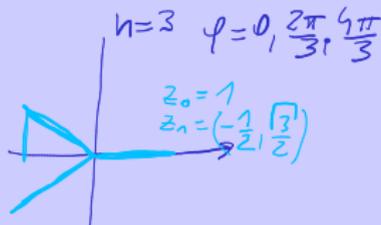
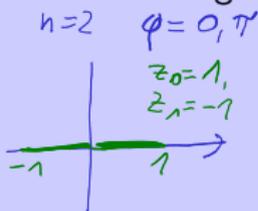
$$z^n = 1 = |z|^n \exp(in\varphi)$$

$$\begin{aligned} 1 &= |z|^n & |z| &= 1 \\ n\varphi &= 2\pi k & \varphi &= \frac{2\pi k}{n} \\ & & k &= 0, \dots, n-1 \end{aligned}$$

besitzt die  $n$  paarweise verschiedenen Lösungen

$$z_k = \exp\left(i \frac{2\pi k}{n}\right) \quad \text{für } k = 0, \dots, n-1.$$

Diese Lösungen werden als  $n$ -te Einheitswurzeln bezeichnet.



## Kapitel 2. Komplexwertige Funktionen einer Variablen

Eine **komplexe Funktion**  $w = f(z)$  ist eine Abbildung  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $D \subset \mathbb{C}$ , d.h. jedem  $z \in D$  wird ein eindeutiges  $w = f(z) \in \mathbb{C}$  zugeordnet.

Die Menge  $D$  ist der **Definitionsbereich** von  $f$ . Die Menge

$$W = f(D) = \{f(z) \mid z \in D\}$$

der **Bild- oder Wertebereich**.

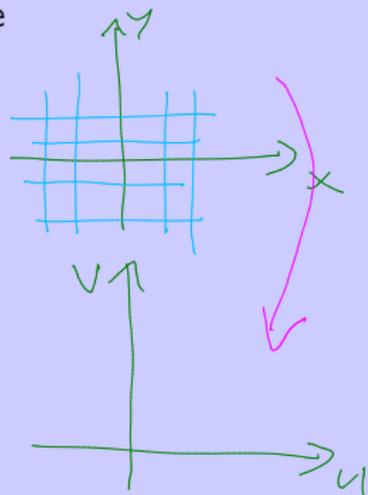
**Notationen:**

$$z = x + iy$$

$$w = u + iv$$

$$u = u(x, y) = \operatorname{Re}(w)$$

$$v = v(x, y) = \operatorname{Im}(w)$$



Zur geometrischen Veranschaulichung komplexer Funktionen verwendet man häufig Bilder von **Koordinatennetzen**.

## 2.1 Lineare Funktionen

**Definition:** Eine komplexe Funktion  $f$  heißt **linear**, falls  $f$  für feste komplexe Konstanten  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ , eine Darstellung der folgenden Form besitzt.

$$f(z) = az + b \quad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

**Frage:** Wie können wir lineare Funktionen geometrisch deuten?

**Spezialfall 1:** Die Wahl  $a = 1$  führt zu einer **Translation** um  $b$ ,

$$f(z) = z + b \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

**Spezialfall 2:** Die Wahl  $a \in (0, \infty)$  und  $b = 0$  führt zu einer **Streckung** bzw. **Stauchung**,

$$f(z) = az \quad \text{für } z \in \mathbb{C},$$

d.h. der Betrag von  $z$  wird **gestreckt** ( $a > 1$ ) oder **gestaucht** ( $0 < a < 1$ ).

Allgemein spricht man von einer **Skalierung** mit **Skalierungsfaktor**  $a > 0$ .

# Weitere Spezialfälle linearer Funktionen.

**Spezialfall 3:** Die Wahl  $a \in \mathbb{C}$  mit  $|a| = 1$  und  $b = 0$  führt zu einer **Drehung** bzw. **Rotation**,

$$f(z) = az \quad \text{für } z \in \mathbb{C},$$

Genauer: eine Drehung um den Winkel  $\alpha \in [0, 2\pi)$ , wobei  $\alpha = \arg(a)$  bzw.  $a = \exp(i\alpha)$ .

**Spezialfall 4:** Die Wahl  $a \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$  und  $b = 0$  führt zu einer **Drehstreckung**

$$f(z) = az \quad \text{für } z \in \mathbb{C},$$

die wir als Komposition einer Rotation und einer Skalierung verstehen.

Genauer gilt: Für

$$a = |a| \exp(i\alpha) \quad \text{mit } \alpha = \arg(a)$$

handelt es sich um eine Rotation um den Winkel  $\alpha \in [0, 2\pi)$  und eine Skalierung um  $|a|$ .

# Der allgemeine Fall linearer Funktionen.

Für  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ , lässt sich jede lineare Funktion

$$f(z) = az + b = |a| \exp(i\alpha)z + b$$

als Komposition

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

von drei Abbildungen schreiben,

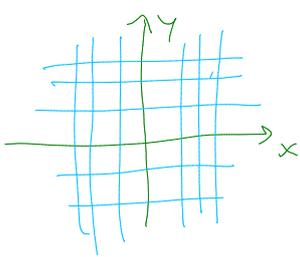
- 1  $f_1(z) = \exp(i\alpha)z$  eine **Drehung** um den Winkel  $\alpha = [0, 2\pi)$ ;
- 2  $f_2(z) = |a|z$  eine **Streckung** um den Skalierungsfaktor  $|a| > 0$ ;
- 3  $f_3(z) = z + b$  eine **Verschiebung** um den Vektor  $b$ .

**Bemerkung:** Drehung  $f_1$  und Streckung  $f_2$  kommutieren, d.h. lassen sich vertauschen, denn es gilt

$$|a| \exp(i\alpha)z = f_2(\exp(i\alpha)z) = f_2(f_1(z)) = f_2 \circ f_1 = f_1 \circ f_2 = f_1(|a|z) = |a| \exp(i\alpha)z$$

und somit  $|a|(z+b) = f_2(z+b) = f_2 \circ f_3 \neq f_3 \circ f_2 = f_3(|a|z) = |a|z + b$

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1 = f_3 \circ f_1 \circ f_2$$



$$f(z) = \underline{Q}z = (c+id)(x+iy) = (cx-dy) + i(dx+cy) = u+iv$$

Gesamt in Blöcken  $\boxed{c_1x + c_2y = d}$

$$d_1u + d_2v = d_1(cx-dy) + d_2(dx+cy) = d$$

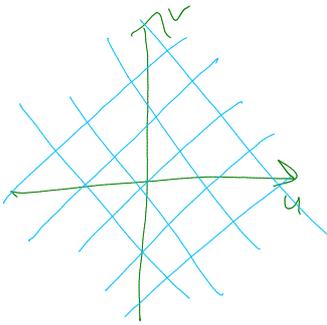
$$= x(\underbrace{cd_1 + dd_2}_{c_1}) + y(\underbrace{cd_2 - dd_1}_{c_2}) = d$$

$$cd_1 + dd_2 = c_1$$

$$-dd_1 + cd_2 = c_2$$

$$\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = c^2 + d^2 \neq 0 \Leftrightarrow Q \neq 0$$



# Der allgemeine Fall linearer Funktionen.

Für  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ , lässt sich jede lineare Funktion

$$f(z) = az + b = |a| \exp(i\alpha)z + b$$

als Komposition

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

von drei Abbildungen schreiben,

- 1  $f_1(z) = \exp(i\alpha)z$  eine **Drehung** um den Winkel  $\alpha = [0, 2\pi)$ ;
- 2  $f_2(z) = |a|z$  eine **Streckung** um den Skalierungsfaktor  $|a| > 0$ ;
- 3  $f_3(z) = z + b$  eine **Verschiebung** um den Vektor  $b$ .

**Bemerkung:** Drehung  $f_1$  und Streckung  $f_2$  kommutieren, d.h. lassen sich vertauschen, denn es gilt

$$f_2 \circ f_1 = f_1 \circ f_2$$

und somit

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1 = f_3 \circ f_1 \circ f_2$$

# Der allgemeine Fall linearer Funktionen.

Für  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ , lässt sich jede lineare Funktion

$$f(z) = az + b = |a| \exp(i\alpha)z + b$$

als Komposition

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

von drei Abbildungen schreiben,

- 1  $f_1(z) = \exp(i\alpha)z$  eine **Drehung** um den Winkel  $\alpha = [0, 2\pi)$ ;
- 2  $f_2(z) = |a|z$  eine **Streckung** um den Skalierungsfaktor  $|a| > 0$ ;
- 3  $f_3(z) = z + b$  eine **Verschiebung** um den Vektor  $b$ .

**Bemerkung:** Drehung  $f_1$  und Streckung  $f_2$  kommutieren, d.h. lassen sich vertauschen, denn es gilt

$$f_2 \circ f_1 = f_1 \circ f_2$$

und somit

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1 = f_3 \circ f_1 \circ f_2$$

# Der allgemeine Fall linearer Funktionen.

Für  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ , lässt sich jede lineare Funktion

$$f(z) = az + b = |a| \exp(i\alpha)z + b$$

als Komposition

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

von drei Abbildungen schreiben,

- 1  $f_1(z) = \exp(i\alpha)z$  eine **Drehung** um den Winkel  $\alpha = [0, 2\pi)$ ;
- 2  $f_2(z) = |a|z$  eine **Streckung** um den Skalierungsfaktor  $|a| > 0$ ;
- 3  $f_3(z) = z + b$  eine **Verschiebung** um den Vektor  $b$ .

**Bemerkung:** Drehung  $f_1$  und Streckung  $f_2$  kommutieren, d.h. lassen sich vertauschen, denn es gilt

$$f_2 \circ f_1 = f_1 \circ f_2$$

und somit

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1 = f_3 \circ f_1 \circ f_2$$

# Der allgemeine Fall linearer Funktionen.

Für  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ , lässt sich jede lineare Funktion

$$f(z) = az + b = |a| \exp(i\alpha)z + b$$

als Komposition

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

von drei Abbildungen schreiben,

- 1  $f_1(z) = \exp(i\alpha)z$  eine **Drehung** um den Winkel  $\alpha = [0, 2\pi)$ ;
- 2  $f_2(z) = |a|z$  eine **Streckung** um den Skalierungsfaktor  $|a| > 0$ ;
- 3  $f_3(z) = z + b$  eine **Verschiebung** um den Vektor  $b$ .

**Bemerkung:** Drehung  $f_1$  und Streckung  $f_2$  kommutieren, d.h. lassen sich vertauschen, denn es gilt

$$f_2 \circ f_1 = f_1 \circ f_2$$

und somit

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1 = f_3 \circ f_1 \circ f_2$$



# Der allgemeine Fall linearer Funktionen.

Für  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ , lässt sich jede lineare Funktion

$$f(z) = az + b = |a| \exp(i\alpha)z + b$$

als Komposition

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

von drei Abbildungen schreiben,

- 1  $f_1(z) = \exp(i\alpha)z$  eine **Drehung** um den Winkel  $\alpha = [0, 2\pi)$ ;
- 2  $f_2(z) = |a|z$  eine **Streckung** um den Skalierungsfaktor  $|a| > 0$ ;
- 3  $f_3(z) = z + b$  eine **Verschiebung** um den Vektor  $b$ .

**Bemerkung:** Drehung  $f_1$  und Streckung  $f_2$  kommutieren, d.h. lassen sich vertauschen, denn es gilt

$$f_2 \circ f_1 = f_1 \circ f_2$$

und somit

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1 = f_3 \circ f_1 \circ f_2$$

# Der allgemeine Fall linearer Funktionen.

Für  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ , lässt sich jede lineare Funktion

$$f(z) = az + b = |a| \exp(i\alpha)z + b$$

als Komposition

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

von drei Abbildungen schreiben,

- 1  $f_1(z) = \exp(i\alpha)z$  eine **Drehung** um den Winkel  $\alpha = [0, 2\pi)$ ;
- 2  $f_2(z) = |a|z$  eine **Streckung** um den Skalierungsfaktor  $|a| > 0$ ;
- 3  $f_3(z) = z + b$  eine **Verschiebung** um den Vektor  $b$ .

**Bemerkung:** Drehung  $f_1$  und Streckung  $f_2$  kommutieren, d.h. lassen sich vertauschen, denn es gilt

$$f_2 \circ f_1 = f_1 \circ f_2$$

und somit

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1 = f_3 \circ f_1 \circ f_2$$

## 2.2 Quadratische Funktionen

**Definition:** Eine komplexe Funktion  $f$  heißt **quadratisch**, falls  $f$  für feste Konstanten  $a, b, c \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ , eine Darstellung der folgenden Form besitzt.

$$f(z) = az^2 + bz + c \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

Wir betrachten zunächst das geometrische Verhalten der quadratischen Funktion

$$f(z) = z^2 \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

Dazu betrachten wir die Bilder der achsenparallelen Geraden unter  $f$ .

Setze  $w = z^2$ . Dann ergibt sich für  $z = x + iy$  und  $w = u + iv$  die Darstellung

$$w = u + iv = z^2 = (x + iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_u + \underbrace{2ixy}_{iv}$$

und somit

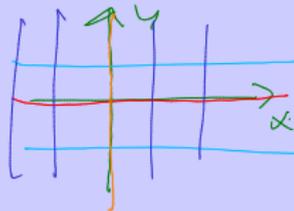
$$\boxed{u = x^2 - y^2} \quad \text{und} \quad \boxed{v = 2xy.}$$

# Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto z^2$ .

Für das Bild einer zur  $x$ -Achse parallelen Geraden  $y = y_0$  bekommt man somit

$$u = x^2 - y_0^2 \quad \text{und} \quad v = 2xy_0$$

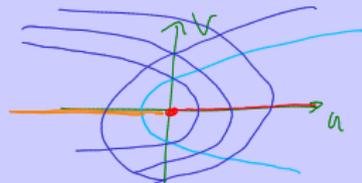
Für  $y_0 = 0$  (die  $x$ -Achse) bekommen wir  $u = x^2$  und  $v = 0$ .



Für  $y_0 \neq 0$  können wir  $x$  mit  $x = v/(2y_0)$  eliminieren, und bekommen somit

$$a = \frac{1}{4y_0^2}$$
$$f = \frac{1}{4a} = \frac{1}{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{y_0^2}} = y_0^2$$

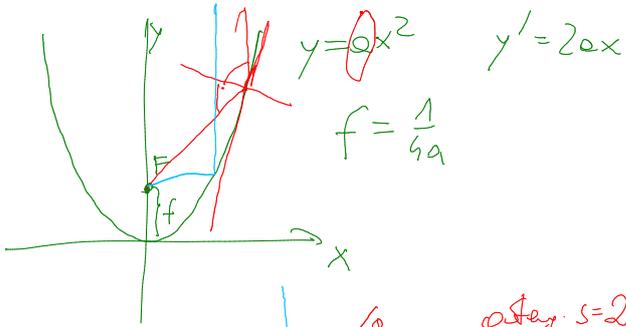
$$u = \frac{v^2}{4y_0^2} - y_0^2,$$



eine nach rechts geöffnete Parabel, symmetrisch zur  $u$ -Achse mit Brennpunkt Null, und den Schnittpunkten  $u = -y_0^2$  (mit  $u$ -Achse) und  $v = \pm 2y_0^2$  ( $v$ -Achse).

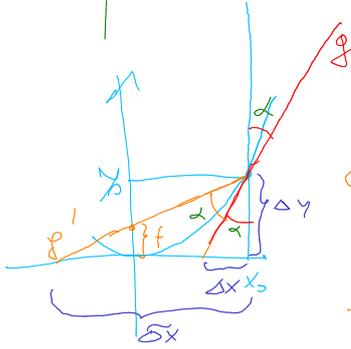
**Fazit:** Die Schar zur  $x$ -Achse paralleler Geraden wird durch die quadratische Funktion  $f(z) = z^2$  auf eine Schar **konfokaler** (d.h. gleiche Symmetrieachse, gleicher Brennpunkt) nach rechts geöffneter Parabeln abgebildet.

Die Geraden  $y = y_0$  und  $y = -y_0$  werden auf die gleiche Parabel abgebildet.



$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{s} = \tan \alpha$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{s'} = \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{1}{s}}{1 - \frac{1}{s^2}} = \frac{2s}{s^2 - 1} = \frac{1}{s'}$$



gesucht:  $s = 2ax_0$

Stütze  $s'$

$$s' \quad y - y_0 = s'(x - x_0) \quad (x_0, y_0) = (x_0, ax_0^2)$$

$$f - y_0 = -s'x_0 \quad (0, f)$$

$$f = y_0 - s'x_0 = ax_0^2 - \frac{s^2 - 1}{2s} x_0 = ax_0^2 - \frac{4a^2 x_0^2 - 1}{4ax_0} x_0 = \frac{4a^2 x_0^2 - 4a^2 x_0^2 + 1}{4a} = \frac{1}{4a}$$

Umab von  $x_0$

## Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto z^2$ .

Für das Bild einer zur  $y$ -Achse parallelen Geraden  $x = x_0$  bekommt man somit

$$u = x_0^2 - y^2 \quad \text{und} \quad v = 2x_0y$$

Für  $x_0 = 0$  (die  $y$ -Achse) bekommen wir  $u = -y^2$  und  $v = 0$ .

Für  $x_0 \neq 0$  können wir  $y$  mit  $y = v/(2x_0)$  eliminieren, und bekommen somit

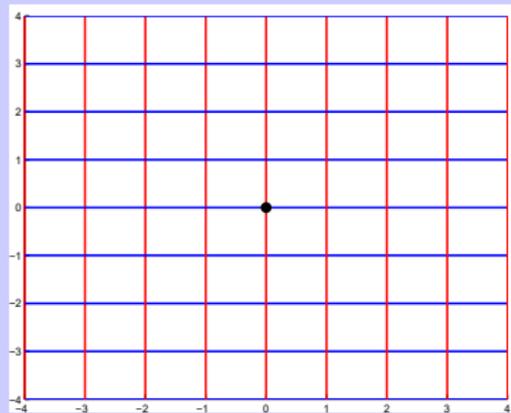
$$u = x_0^2 - \frac{v^2}{4x_0^2}$$

eine nach links geöffnete Parabel, symmetrisch zur  $u$ -Achse mit Brennpunkt Null, und den Schnittpunkten  $u = x_0^2$  (mit  $u$ -Achse) und  $v = \pm 2x_0^2$  ( $v$ -Achse).

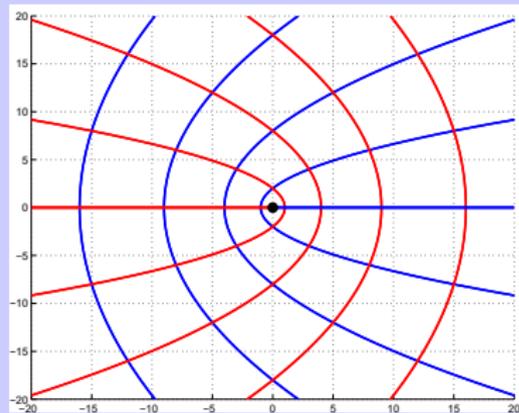
**Fazit:** Die Schar zur  $y$ -Achse paralleler Geraden wird durch die Funktion  $f(z) = z^2$  auf eine Schar konfokaler nach links geöffneter Parabeln abgebildet.

Die Geraden  $x = x_0$  und  $x = -x_0$  werden auf die gleiche Parabel abgebildet.

# Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto z^2$ .



**Urbild.**



**Bild von  $f(z) = z^2$ .**

# Allgemeine quadratische Funktionen.

Für  $a, b, c \in \mathbb{C}$ ,  $a, b \neq 0$ , und mit der Darstellung

$$f(z) = az^2 + bz + c = a \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

setzt sich jede quadratische Funktion als Komposition

$$f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

von vier Abbildungen zusammen:

- 1 der Translation  $f_1(z) = z + \frac{b}{2a}$ ;
- 2 der quadratischen Funktion  $f_2(z) = z^2$ ;
- 3 der Drehstreckung  $f_3(z) = az$ ;
- 4 der Translation  $f_4(z) = z - \frac{b^2}{4a} + c$ .

# Kapitel 2. Komplexwertige Funktionen einer Variablen

## 2.3 Die Exponentialfunktion

**Definition:** Die **komplexe Exponentialfunktion**  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist definiert durch

$$\exp(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i \sin(y)) \quad \text{für } z = x + iy.$$

$\neq 0 \forall z$

**Beachte:** Es gilt das Additionstheorem

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2} \quad \text{für } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

**Frage:** Wie sieht die komplexe Exponentialfunktion  $z \rightarrow \exp(z)$  aus?

Für  $w = \exp(z)$ ,  $z = x + iy$  und  $w = u + iv$  bekommen wir

$$w = u + iv = e^z = \underbrace{e^x(\cos(y))}_u + i \sin(y)$$

und somit

$$u = e^x \cos(y)$$

und

$$v = e^x \sin(y)$$

# Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto \exp(z)$ .

Für das Bild einer zur  $x$ -Achse parallelen Geraden  $y = y_0$  bekommt man somit

$$u = e^x \cos(y_0) \quad \text{und} \quad v = e^x \sin(y_0) \quad \frac{v}{u} = \frac{\sin y_0}{\cos y_0} = \tan y_0$$

- Für festes  $y_0$  ergibt dies einen vom Ursprung ausgehenden Strahl, der mit der positiven  $x$ -Achse den Winkel  $y_0$  einschließt.
- Für Winkel  $y_0$  und  $y_1$ , die sich um ein Vielfaches von  $2\pi$  unterscheiden, d.h.

$$y_1 = y_0 + 2\pi k \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z},$$

ergibt sich der gleiche Strahl.

- **Genauer:** Wegen der **Periodizität** von  $\exp(z)$  gilt

$$e^{z+2\pi ik} = e^z e^{2\pi ik} = e^z (\underbrace{\cos(2\pi k) + i \sin(2\pi k)}_1) = e^z \cdot 1 = e^z.$$

d.h. zwei Punkte mit gleichen Realteilen, deren Imaginärteile sich um ein Vielfaches von  $2\pi$  unterscheiden, werden auf den gleichen Punkt abgebildet.

# Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto \exp(z)$ .

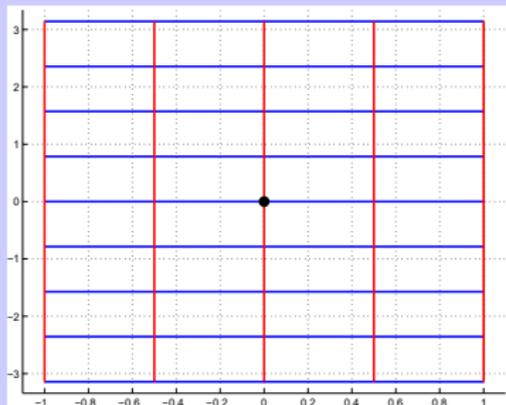
Für das Bild einer zur  $y$ -Achse parallelen Geraden  $x = x_0$  bekommt man

$$u = e^{x_0} \cos(y) \quad \text{und} \quad v = e^{x_0} \sin(y)$$

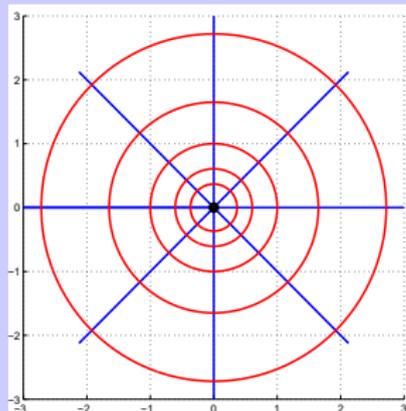
$u^2 + v^2 = e^{2x_0} (\cos^2 + \sin^2) = e^{2x_0}$

- Für festes  $x_0$  ergibt dies einen Kreis um Null mit Radius  $e^{x_0}$ .
- **Beachte:** Der Nullpunkt liegt nicht im Bild der Exponentialfunktion, d.h. es gibt kein Argument  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\exp(z) = 0$ . Somit gilt  $e^z \neq 0$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ .
- **Beobachtung:** Die Exponentialfunktion bildet Rechteckgitter im kartesischen Koordinatensystem auf Netze von Kurven ab, die sich rechtwinklig schneiden.
- **Genauer:** Kurven, die sich im kartesischen Koordinatensystem rechtwinklig schneiden, werden unter der Exponentialfunktion  $\exp$  auf Kurven abgebildet, die sich ebenso (im jeweiligen Schnittpunkt) rechtwinklig schneiden.
- **Noch allgemeiner:** Die Exponentialfunktion ist in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  **winkeltreu** bzw. **konform**. Genauere Details dazu später.

# Bilder achsenparalleler Geraden unter $z \mapsto \exp(z)$ .



**Urbild.**



**Bild von  $f(z) = \exp(z)$ .**

# Kapitel 2. Komplexwertige Funktionen einer Variablen

## 2.4 Die Umkehrfunktion



**Definition:** Eine komplexe Funktion  $f(z)$  heißt **injektiv**, wenn es zu jedem Punkt  $w \in \mathbb{C}$  ihres Wertebereichs genau einen Punkt  $z \in \mathbb{C}$  ihres Definitionsbereichs gibt mit  $f(z) = w$ .

**Bemerkung:** Eine nicht injektive Funktion wird ggf. durch eine geeignete Einschränkung ihres Definitionsbereichs injektiv.

$$f(z) = z^2 \quad \text{nicht inj. auf } \mathbb{R} \\ \text{ist inj. auf } \mathbb{R}_+$$

### Beispiele.

- 1 die lineare Funktion  $f(z) = az + b$ ,  $a \neq 0$ , ist injektiv.  $z = \frac{f(z) - b}{a}$
- 2 die quadratische Funktion  $f(z) = z^2$ , ist **nicht** injektiv, denn es gilt  $f(z) = f(-z)$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ .
- 3 die komplexe Exponentialfunktion  $\exp(z)$  ist **nicht** injektiv, denn es gilt  $\exp(z) = \exp(z + 2\pi ik)$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$  und alle  $z \in \mathbb{C}$ .

# Einschränkung des Definitionsbereichs.

**Bemerkung:** Eine nicht injektive Funktion wird ggf. durch eine geeignete Einschränkung ihres Definitionsbereichs injektiv.

**Beispiel:** Betrachte die quadratische Funktion

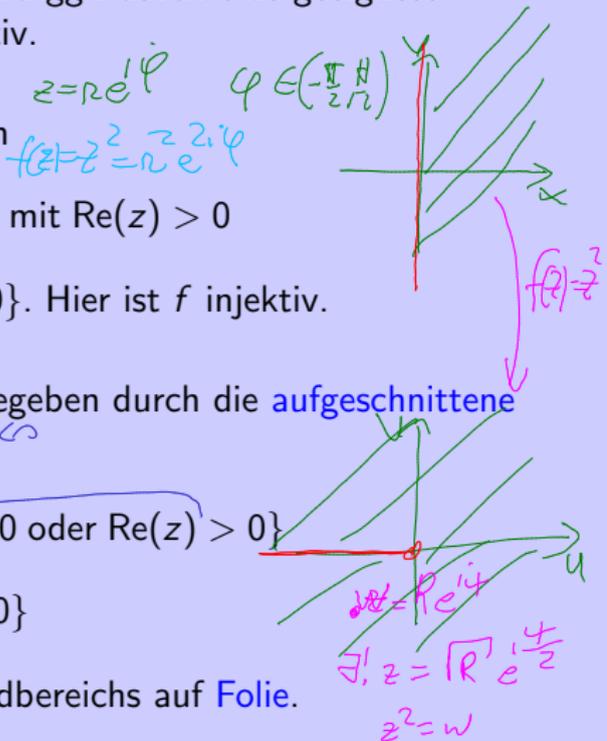
$$f(z) = z^2 \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re}(z) > 0$$

auf der **rechten Halbebene**  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$ . Hier ist  $f$  injektiv.

Weiterhin ist in diesem Fall der Bildbereich gegeben durch die **aufgeschnittene komplexe Ebene**

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^- &= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \neq 0 \text{ oder } \operatorname{Re}(z) > 0\} \\ &= \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} \mid z \leq 0\} \end{aligned}$$

**Graphische Darstellung** des Urbild- und Bildbereichs auf Folie.

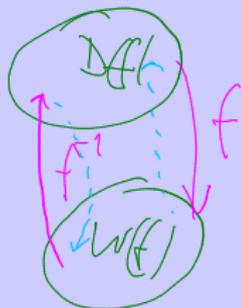


# Umkehrfunktion.

**Definition:** Sei  $f$  eine injektive Funktion mit Definitionsbereich  $D(f)$  und Wertebereich  $W(f)$ . Dann ist die **Umkehrfunktion**  $f^{-1} : W(f) \rightarrow D(f)$  zu  $f$  diejenige Funktion, die jedem Punkt  $w \in W(f)$  den (eindeutigen) Punkt  $z \in D(f)$  mit  $f(z) = w$  zuordnet, d.h. es gilt  $f^{-1}(w) = z$  bzw.

$$(f^{-1} \circ f)(z) = z \quad \text{für alle } z \in D(f)$$

$$(f \circ f^{-1})(w) = w \quad \text{für alle } w \in W(f)$$



**Beispiel:** Für den Definitionsbereich

$$D(f) = \{z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \mid r > 0 \text{ und } -\pi/2 < \varphi < \pi/2\}$$

existiert die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  von  $f(z) = z^2$  mit Wertebereich  $W(f) = \mathbb{C}^-$ .

Für den **Hauptwert der Wurzel**  $f^{-1} : W(f) \rightarrow D(f)$  gilt

$$w = f^{-1}(z) = \sqrt{r}e^{i\varphi/2} \quad \text{für } z = re^{i\varphi} \text{ mit } \varphi = \arg(z) \in (-\pi, \pi).$$

## 2.5 Der komplexe Logarithmus

**Ziel:** Umkehrung der komplexen Exponentialfunktion

$$f(z) = \exp(z).$$

**Beachte:** Die Exponentialfunktion  $\exp(z)$  ist für **alle**  $z \in \mathbb{C}$  erklärt, und es gilt

$$D(\exp) = \mathbb{C} \quad \text{und} \quad W(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

für den Definitions- und Wertebereich.

**Aber:** Die Exponentialfunktion ist nicht injektiv auf  $\mathbb{C}$ .

**Also:** Zur Konstruktion einer Umkehrfunktion  $\exp^{-1}$  von  $\exp$  müssen wir den Definitionsbereich von  $\exp$  geeignet einschränken.

**Frage:** Sei  $z = x + iy \in W(\exp)$ . Welche Werte  $w = u + iv$  kommen in Frage, so dass gilt

$$e^w = z? \quad \left( \text{da keine da } w = \ln z \right)$$

# Konstruktion des komplexen Logarithmus.

**Ausgangspunkt:** Für  $z = x + iy \in W(\exp)$  soll gelten

$$e^w = z \quad \text{für ein } w = u + iv \in \mathbb{C}.$$

Dann gilt

$$e^u = |e^u e^{iv}| = |e^{u+iv}| = |e^w| = |e^u| = |z|$$

und somit  $u = \ln(|z|)$ , wobei  $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  der **reelle** Logarithmus ist.

Weiterhin gilt

$$\arg z = \arg(e^w) = \arg(e^{u+iv}) = \arg(e^u e^{iv}) = v$$

und somit  $v = \arg(z) + 2\pi k$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$ .

Daher besteht die Menge der Lösungen von  $e^w = z$  aus den komplexen Zahlen

$$w = \ln(|z|) + i(\arg(z) + 2\pi k) \quad \text{mit einem } k \in \mathbb{Z}.$$

$w = \text{Log } z$

Die Menge der Lösungen von  $e^w = z$  heißt **komplexer Logarithmus** von  $z$ .

# Beispiele.

Die Funktion  $\text{Log}(z)$  bezeichnet den komplexen Logarithmus von  $z$ .

**Beispiel 1:** Wie sieht die Menge  $\text{Log}(-1)$  aus? Zunächst gilt  $\ln(|-1|) = \ln(1) = 0$  und das Argument von  $-1$  ist  $\arg(-1) = \pi$ . Somit gilt

$$\text{Log}(-1) = \{i(2k + 1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

für die Werte des Logarithmus von  $-1$ .



**Beispiel 2:** Wie sieht die Menge  $\text{Log}(-1 + i)$  aus? Zunächst gilt  $|-1 + i| = \sqrt{2}$  und weiterhin ist  $\arg(-1 + i) = \frac{3\pi}{4}$  das Argument von  $-1 + i$ . Somit gilt

$$\text{Log}(-1 + i) = \left\{ \underline{\ln(\sqrt{2})} + i \left( \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

für die Werte des Logarithmus von  $-1 + i$ .

**Beispiel 3:** Für  $x > 0$  gilt  $\text{Log}(x) = \{\ln(x) + 2\pi ik \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

# Der Hauptwert des Logarithmus.

Die vorherigen Überlegungen zur Gleichung

$$e^{x+iy} = e^x (e^{iy})$$

$$z = e^w$$

zeigten, dass die Exponentialfunktion auf dem Streifen

$$S = \{w \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im}(w) < \pi\}$$

injektiv ist. Der zugehörige Wertebereich ist  $\mathbb{C}^-$ .

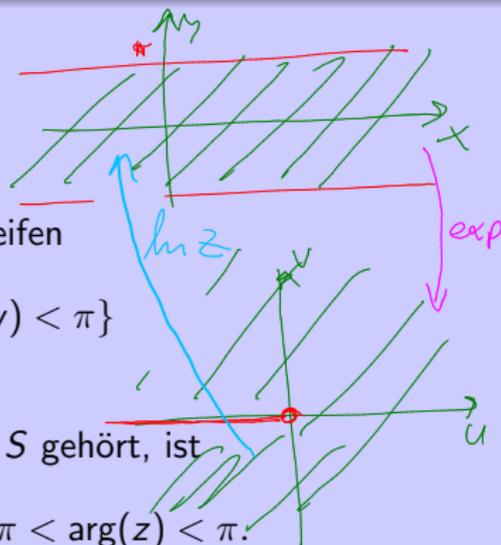
Der einzige Wert von  $\operatorname{Log}(z)$ , der zu dem Streifen  $S$  gehört, ist

$$\operatorname{Log} z = w = \log(|z|) + i \arg(z)$$

$$\text{mit } -\pi < \arg(z) < \pi.$$

Dieser Wert heißt der **Hauptwert des Logarithmus** von  $z$ , kurz  $\operatorname{Ln}(z)$ .

**Bemerkung:** Der Hauptwert des Logarithmus ist nur in der aufgeschnittenen komplexen Ebene  $\mathbb{C}^-$  definiert. Auf der negativen reellen Achse und bei  $z = 0$  ist  $\operatorname{Ln}(z)$  nicht definiert. Auf der positiven reellen Achse stimmt  $\operatorname{Ln}(z)$  mit dem reellen Logarithmus  $\operatorname{Ln}(x)$  überein.



## 2.6 Die Joukowski-Funktion

Die **Joukowski-Funktion**, definiert durch

$$f(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) \quad \text{für } z \neq 0,$$

ist im Zusammenhang mit Problemen der Strömungsdynamik von Interesse.

**Beobachtung:** Es gilt die Symmetrie

$$f(z) = f(1/z) \quad \text{für } z \neq 0.$$

**Ziel:** Analysiere das geometrische Verhalten der Joukowski-Funktion.

Bestimme dazu für

$$w = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$$

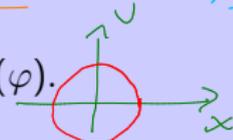
die Bilder der Kreise  $|z| = \text{const.}$  und der Strahlen  $\arg(z) = \text{const.}$

# Geometrisches Verhalten der Joukowski-Funktion.

Für  $z = re^{i\varphi}$  und  $w = u + iv$  bekommen wir

$$u + iv = \frac{1}{2} \left( re^{i\varphi} + \frac{1}{r} e^{-i\varphi} \right) = \frac{1}{2} \left[ \frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{1} + \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi) \right]$$

und somit

$$u = \frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right) \cos(\varphi) \quad \text{und} \quad v = \frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right) \sin(\varphi).$$


Für das Bild des Kreises  $r \equiv r_0 > 0$  erhält man die Parameterdarstellung

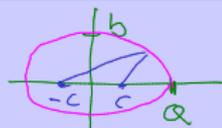
$$\left. \begin{aligned} \frac{u^2}{\frac{1}{4} \left( r_0 + \frac{1}{r_0} \right)^2} &= \cos^2 \varphi & u &= \frac{1}{2} \left( r_0 + \frac{1}{r_0} \right) \cos(\varphi) \\ \dots &= \sin^2 \varphi & v &= \frac{1}{2} \left( r_0 - \frac{1}{r_0} \right) \sin(\varphi) \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$


für den Einheitskreis  $r_0 \equiv 1$  somit  $u = \cos(\varphi)$ , für  $0 \leq \varphi < 2\pi$ , und  $v \equiv 0$ , also die Strecke zwischen den Punkten  $-1$  und  $1$ , die **zweimal** durchlaufen wird.

# Geometrisches Verhalten der Joukowski-Funktion.

Für  $r_0 \neq 1$  können wir  $\varphi$  eliminieren, womit man die Ellipse

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4} \left( r_0 + \frac{1}{r_0} \right)^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4} \left( r_0 - \frac{1}{r_0} \right)^2} = 1$$



$$\left( \frac{u}{a} \right)^2 + \left( \frac{v}{b} \right)^2 = 1$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1$$

mit den Halbachsen

$$a = \frac{1}{2} \left( r_0 + \frac{1}{r_0} \right) \quad \text{und} \quad b = \frac{1}{2} \left| r_0 - \frac{1}{r_0} \right|$$

und den Brennpunkten  $\pm 1$  bekommt.

**Fazit:** Die Joukowski-Funktion bildet eine Schar von Kreisen  $r \equiv \text{const.}$  auf eine Schar **kofokaler Ellipsen** ab. Die beiden Kreise  $r \equiv r_0$  und  $r \equiv 1/r_0$  werden dabei auf die gleiche Ellipse abgebildet.

# Geometrisches Verhalten der Joukowski-Funktion.

Für die Bilder des Strahls  $\varphi \equiv \varphi_0$  bekommt man

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^2}{\cos^2 \varphi_0} &= \frac{1}{4} \left( r^2 + 2 + \frac{1}{r^2} \right) & u &= \frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right) \cos(\varphi_0) \\ \frac{v^2}{\sin^2 \varphi_0} &= \frac{1}{4} \left( r^2 - 2 + \frac{1}{r^2} \right) & v &= \frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right) \sin(\varphi_0) \end{aligned} \right\}$$

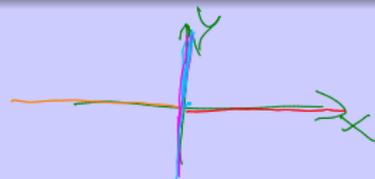
für die positive  $x$ -Achse  $\varphi_0 = 0$  somit

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right) \\ v &= 0 \end{aligned} \right\}$$

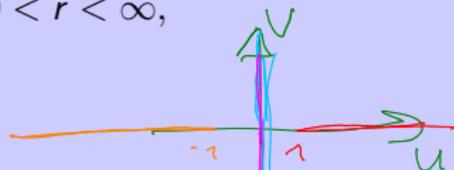
das Stück  $\{(u, 0) \mid 1 \leq u < \infty\}$  der  $u$ -Achse.

Analog erhalten wir für die negative  $x$ -Achse  $\varphi_0 = \pi$  das Stück  $-\infty < u < -1$ .

Die Strahlen  $\varphi_0 = \pi/2$  (positive  $y$ -Achse) und  $\varphi_0 = 3\pi/2$  (negative  $y$ -Achse) werden auf die komplette  $v$ -Achse abgebildet.



$$0 < r < \infty,$$



$$0 < r < \infty,$$



# Geometrisches Verhalten der Joukowski-Funktion.

Falls  $\varphi_0 \notin \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$ , so können wir  $r$  eliminieren, womit wir die Hyperbel

$$\frac{u^2}{\cos^2(\varphi_0)} - \frac{v^2}{\sin^2(\varphi_0)} = 1$$

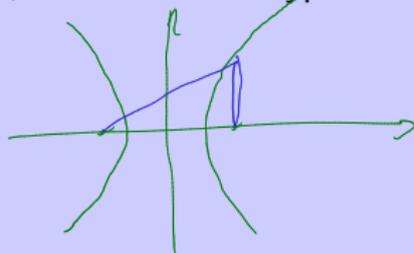
mit den Halbachsen

$$a = |\cos(\varphi_0)| \quad \text{und} \quad b = |\sin(\varphi_0)|$$

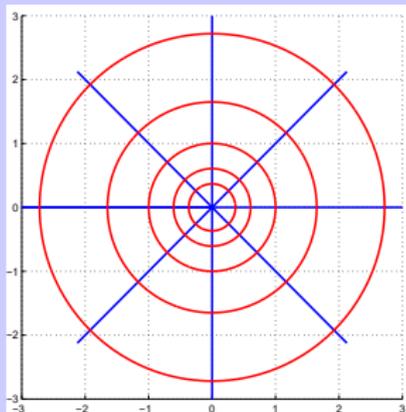
bekommen. Der Abstand der Brennpunkte der Hyperbel von Zentrum beträgt

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\cos^2(\varphi_0) + \sin^2(\varphi_0)} = 1.$$

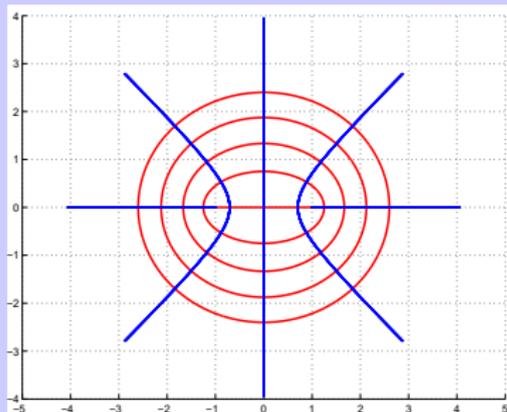
Somit liegen die beiden Brennpunkte bei  $\pm 1$ .



# Bilder unter der Joukowski-Funktion.



**Urbild.**



**Bild der Joukowski-Funktion.**



# Weitere Bemerkungen zur Joukowski–Funktion.

- 1 Die Joukowski–Funktion bildet das Polarkoordinatennetz auf ein Netz von Ellipsen und Hyperbeln ab, die sich jeweils im rechten Winkel schneiden. Die Joukowski–Funktion ist winkeltreu.
- 2 Die Joukowski–Funktion ist auf ihrem Definitionsbereich  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  **nicht** injektiv, denn für jedes  $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1, 0\}$  gilt  $z \neq 1/z$ , aber  $f(z) = f(1/z)$ .
- 3 Auf den folgenden zwei Einschränkungen ihres Definitionsbereichs ist die Joukowski–Funktion injektiv.
  - Auf dem **Komplement des Einheitskreises**  $D(f) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ .
  - Auf der **oberen Halbebene**  $D(f) = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ .
- 4 Die Umkehrfunktion  $w = f^{-1}(z)$  der Joukowski–Funktion  $f(w)$  bekommt man durch Auflösen resultierenden der quadratischen Gleichung

$$w = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) \quad zwz = z^2 + 1 \quad w^2 - 2zw + 1 = 0$$

nach  $w$  in dem jeweiligen Definitionsbereich  $D(f)$ , somit  $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$ .

## 3.1 Die stereographische Projektion

**Vorbemerkungen:** Bei der Untersuchung rationaler Funktionen

$$R(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \quad \text{mit Polynomen } p, q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

ist es sinnvoll, die **Lücken** des Definitionsbereichs (d.h. die Nullstellen von  $q(z)$ ) dadurch zu schließen, dass man  $R(z)$  dort den “Wert”  $\infty$  zuordnet, sofern nicht gleichzeitig der Zähler  $p(z)$  dort verschwindet.

**Notation:** Falls  $z^* \in \mathbb{C}$  eine Nullstelle von  $q$  ist, d.h.  $q(z^*) = 0$ , und  $p(z^*) \neq 0$ , so schreibt man  $R(z^*) = \infty$ , d.h. der Wertebereich von  $R$  wird um die “Zahl”  $\infty$  erweitert.

**Definition:** In der Erweiterung  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  der komplexen Zahlenebene wird  $\infty$  als **unendlich ferner Punkt** bezeichnet.

# Erweiterung der Rechenregeln für $\mathbb{C}^*$ .

Auf der erweiterten komplexen Zahlenebene  $\mathbb{C}^*$  werden zusätzlich zu den üblichen Rechenregeln in  $\mathbb{C}$  folgende **Rechenregeln** definiert.

$$a + \infty := \infty \quad \text{für } a \in \mathbb{C}$$

$$1 \cdot \infty = \infty$$

$$a \cdot \infty := \infty \quad \text{für } a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$-1 \cdot \infty = -\infty$$

$$a/\infty := 0 \quad \text{für } a \in \mathbb{C}$$

**Warnung:** Die Verknüpfungen  $0 \cdot \infty$  und  $\infty \pm \infty$  lassen sich nicht sinnvoll (d.h. nicht widerspruchsfrei) definieren.

**Topologische Bedeutung:** Die erweiterte komplexe Zahlenebene  $\mathbb{C}^*$  ist ein **topologischer Raum**. Für eine komplexe Zahlenfolge  $\{z_n\}_n$ ,  $z_n \neq 0$ , gilt

$$z_n \rightarrow \infty \quad \text{für } n \rightarrow \infty \quad \iff \quad 1/z_n \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

Der Raum  $\mathbb{C}^*$  ist **folgenkompakt**, d.h. **jede** Folge in  $\mathbb{C}^*$  besitzt (mindestens) einen Häufungspunkt. Daher wird  $\mathbb{C}^*$  als **Kompaktifizierung** von  $\mathbb{C}$  bezeichnet.

# Die stereographische Projektion.

**Definition:** Die stereographische Projektion ist diejenige Abbildung  $P : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}^*$  der **Riemannschen Zahlenkugel**

$$\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$$

auf die erweiterte komplexe Ebene  $\mathbb{C}^*$ , die jedem Punkt  $x \in \mathbb{S}^2$ ,  $x \neq N = (0, 0, 1)^T$ , den Durchstoßpunkt  $P(x)$  der Geraden durch  $x$  und  $n$  durch die  $x_1$ - $x_2$ -Ebene zuordnet, wobei  $P(N) := \infty$  definiert wird.

Die stereographische Projektion besitzt die folgende analytische Darstellung.

$$z = P(x) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \in \mathbb{C}^* \quad \text{für } x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{S}^2.$$

## Bemerkungen:

- 1 Die stereographische Projektion  $P : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}^*$  ist bijektiv.
- 2 Die Umkehrabbildung  $P^{-1}$  von  $P$  ist gegeben durch

$$x = P^{-1}(z) = \left( \frac{z + \bar{z}}{1 + z\bar{z}}, \frac{z - \bar{z}}{i(1 + z\bar{z})}, \frac{z\bar{z} - 1}{1 + z\bar{z}} \right)^T \in \mathbb{S}^2 \quad \text{für } z \in \mathbb{C}^*.$$

# Die stereographische Projektion.

**Definition:** Die stereographische Projektion ist diejenige Abbildung  $P : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}^*$  der **Riemannschen Zahlenkugel**

$$\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$$

auf die erweiterte komplexe Ebene  $\mathbb{C}^*$ , die jedem Punkt  $x \in \mathbb{S}^2$ ,  $x \neq N = (0, 0, 1)^T$ , den Durchstoßpunkt  $P(x)$  der Geraden durch  $x$  und  $n$  durch die  $x_1$ - $x_2$ -Ebene zuordnet, wobei  $P(N) := \infty$  definiert wird.

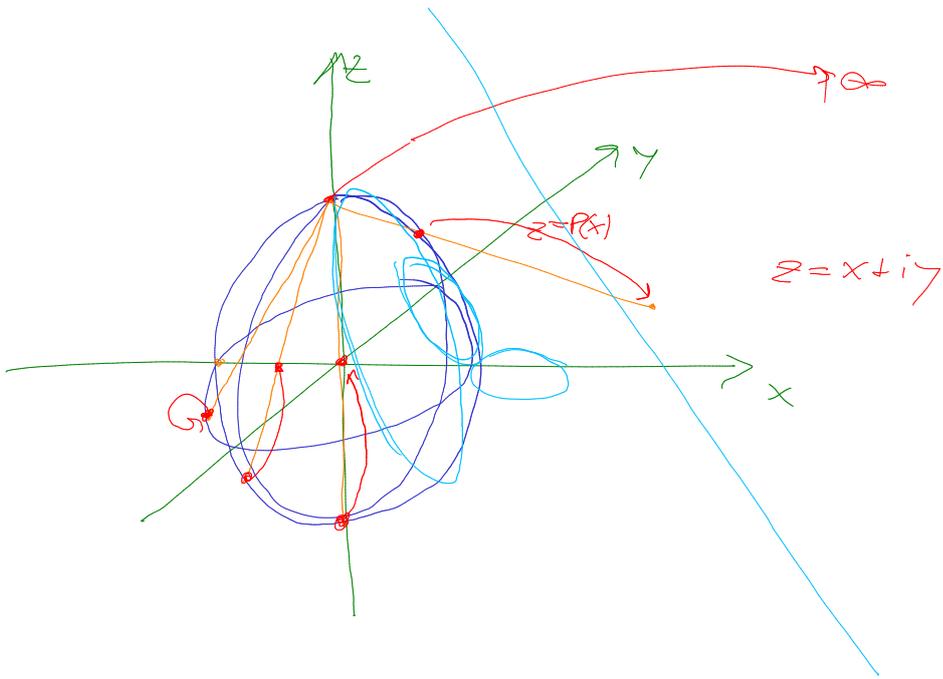
Die stereographische Projektion besitzt die folgende analytische Darstellung.

$$z = P(x) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \in \mathbb{C}^* \quad \text{für } x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{S}^2.$$

## Bemerkungen:

- 1 Die stereographische Projektion  $P : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}^*$  ist bijektiv.
- 2 Die Umkehrabbildung  $P^{-1}$  von  $P$  ist gegeben durch

$$x = P^{-1}(z) = \left( \frac{z + \bar{z}}{1 + z\bar{z}}, \frac{z - \bar{z}}{i(1 + z\bar{z})}, \frac{z\bar{z} - 1}{1 + z\bar{z}} \right)^T \in \mathbb{S}^2 \quad \text{für } z \in \mathbb{C}^*.$$



# Geometrie der stereographischen Projektion.

Unter einem **sphärischen Bild**  $U$  einer Menge  $B \subset \mathbb{C}^*$  verstehen wir im folgenden das Urbild unter der stereographischen Projektion, so dass  $P(U) = B$ .

**Satz:** Für die stereographische Projektion gelten die folgenden Eigenschaften.

- Das sphärische Bild einer Geraden in  $\mathbb{C}^*$  ist ein Kreis auf  $\mathbb{S}^2$ , der durch  $N$  geht.
- Ein Kreis auf  $\mathbb{S}^2$ , der durch  $N$  geht, wird durch die stereographische Projektion auf eine Gerade in  $\mathbb{C}^*$  abgebildet.
- Das sphärische Bild eines Kreises in  $\mathbb{C}$  ist ein Kreis auf  $\mathbb{S}^2$ , der nicht durch  $N$  geht.
- Ein Kreis auf  $\mathbb{S}^2$ , der nicht durch  $N$  geht, wird durch die stereographische Projektion auf einen Kreis in  $\mathbb{C}$  abgebildet.
- Die stereographische Projektion ist **kreistreu**.

# Kapitel 3. Die Möbius-Transformation

## 3.2 Möbius-Transformationen

**Definition:** Eine rationale Abbildung der Form

$$w = T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit} \quad ad \neq bc$$

$\frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}}$

heißt **Möbius-Transformation**.

**Bemerkung:** Für eine Möbius-Transformation  $T : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  gilt

- 1 Zähler und Nenner haben verschiedene Nullstellen.
- 2 Es gilt  $T(-d/c) = \infty$  und  $T(\infty) = a/c$ .
- 3 Die Abbildung  $T(z)$  ist bijektiv mit Umkehrabbildung  $T^{-1} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$

$$\begin{aligned} czw + dw &= az + b \\ z(cw - a) &= b - dw \end{aligned}$$

$$T^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}$$

- 4 Analogie zu der Inversen einer  $(2 \times 2)$ -Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

# Komposition von Möbius-Transformationen.

**Satz:** Die Komposition zweier Möbius-Transformationen ist **wieder** eine Möbius-Transformation. Genauer gilt

$$w = T_1(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{für } ad \neq bc$$

$$u = (T_2 \circ T_1)(z) = T_2(w) = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta} \quad \text{für } \alpha\delta \neq \beta\gamma$$

$$= \frac{\alpha \frac{az+b}{cz+d} + \beta}{\gamma \frac{az+b}{cz+d} + \delta} =$$

$$= \frac{Az + B}{Cz + D}$$

Die Koeffizienten  $A, B, C$  und  $D$  ergeben sich aus dem **Matrixprodukt**

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Insbesondere gilt wegen  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

$$AD - BC = (ad - bc) \cdot (\alpha\delta - \beta\gamma) \neq 0$$

# Kreistreue von Möbius-Transformationen.

**Satz:** Möbius-Transformationen sind **kreistreu**, d.h. (verallgemeinerte) Kreise in  $\mathbb{C}^*$  gehen durch Möbius-Transformationen in (verallgemeinerte) Kreise über.

**Beweis:** Verwende eine geeignete Zerlegung für  $c \neq 0$

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{\frac{a}{c}(cz + d) - \frac{ad}{c} + b}{cz + d} = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c} \cdot \frac{1}{\underbrace{cz + d}_{=w_2}} = w_3$$

Wir setzen nun

$$w_1 = cz + d$$

$$w_2 = \frac{1}{w_1}$$

$$w_3 = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c} \cdot w_2$$

Die Abbildungen  $w_1$  und  $w_3$  sind linear und daher **kreistreu**.

## Fortsetzung des Beweises.

Es bleibt zu zeigen:

Die Inversion  $w = f(z) = 1/z$  ist eine kreistreue Abbildung.

Gehe den Umweg über die stereographische Projektion, d.h. betrachte statt  $z \rightarrow 1/z$  die Abbildungsfolge

$$z \rightarrow x := P^{-1}(z) \rightarrow \tilde{x} \rightarrow P(\tilde{x}) = \frac{1}{z}$$

$P^{-1}\left(\frac{1}{z}\right) = \tilde{x}$

Dann gilt

$$x = P^{-1}(z) = \left( \frac{z + \bar{z}}{z\bar{z} + 1}, \frac{z - \bar{z}}{i(z\bar{z} + 1)}, \frac{z\bar{z} - 1}{z\bar{z} + 1} \right)^T$$

sowie

$$\begin{aligned} \tilde{x} &:= P^{-1}\left(\frac{1}{z}\right) \\ &= \left( \frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}}{\frac{1}{z}\frac{1}{\bar{z}} + 1}, \frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}}}{i\left(\frac{1}{z}\frac{1}{\bar{z}} + 1\right)}, \frac{\frac{1}{z}\frac{1}{\bar{z}} - 1}{\frac{1}{z}\frac{1}{\bar{z}} + 1} \right)^T \end{aligned}$$

# Komplettierung des Beweises.

Eine Vereinfachung ergibt

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= \left( \frac{z + \bar{z}}{z\bar{z} + 1}, -\frac{z - \bar{z}}{i(z\bar{z} + 1)}, -\frac{z\bar{z} - 1}{z\bar{z} + 1} \right) \\ &= (x_1, -x_2, -x_3)^T\end{aligned}$$

Wir erhalten damit eine Abbildung  $F : S^2 \rightarrow S^2$  mit

$$F(x) = (x_1, -x_2, -x_3)^T$$

Diese Abbildung ist eine Drehung der Sphäre um die  $x_1$ -Achse um  $180^\circ$  und offensichtlich **kreistreu**.

Damit haben wir gezeigt, dass die Abbildungsfolge

$$z \rightarrow x := P^{-1}(z) \rightarrow \tilde{x} \rightarrow P(\tilde{x}) = \frac{1}{z}$$

und daher die Inversion  $z \rightarrow 1/z$  eine kreistreue Abbildung ist.

# Bemerkungen zu Möbius-Transformationen.

**Bemerkung:** Für eine Möbius-Transformation

$$w = T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit } ad \neq bc$$

gelten die folgenden Eigenschaften.

- (Verallgemeinerte) Kreise durch den Punkt  $-d/c$  werden durch  $T$  auf Geraden in der  $w$ -Ebene abgebildet.
- Alle Geraden der  $z$ -Ebene werden durch  $T$  in (verallgemeinerte) Kreise der  $w$ -Ebene durch den Punkt  $a/c$  abgebildet.
- Kreise, die **nicht** durch den Punkt  $-d/c$  gehen, werden durch  $T$  in Kreise abgebildet, die **nicht** durch den Punkt  $a/c$  gehen.

# Doppelverhältnisse und Möbius-Transformationen.

**Satz:** Seien  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$  und  $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}^*$  jeweils paarweise verschieden. Dann gibt es **genau eine** Möbius-Transformation  $w = T(z)$ , die die Interpolationsbedingungen

$$w_j = T(z_j) \quad \text{für } j = 1, 2, 3$$

erfüllt. Die interpolierende Möbius-Transformation  $T(z)$  ist gegeben durch die **Dreipunkteformel**

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

**Definition:** Den Ausdruck

$$D(z_0, z_1, z_2, z_3) = \frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

nennt man das **Doppelverhältnis** der Punkte  $z_0, z_1, z_2, z_3$ .

## Beispiel.

Gesucht ist die Möbius-Transformation mit den **Interpolationsbedingungen**

$$\begin{array}{c|ccc} z_i & 1 & i & 0 \\ \hline w_i & i & -i & 0 \end{array}$$

Wir erhalten diese eindeutige Möbius-Transformation durch den Ansatz

$$\frac{w - i}{w + i} : \frac{0 - i}{0 + i} = \frac{z - 1}{z - i} : \frac{0 - 1}{0 - i}$$

Eine Vereinfachung ergibt

$$-\frac{w - i}{w + i} = i \frac{z - 1}{z - i}$$

bzw.

$$(z - i)(w - i) = -i(z - 1)(w + i)$$

und dies liefert schließlich die Darstellung

$$w = \frac{(1 + i)z}{(1 + i)z - 2i}$$

# Symmetrie zum Kreis.

**Definition:** Gegeben sei ein Kreis  $C$  in  $\mathbb{C}$  mit Mittelpunkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  und Radius  $R$ . Zwei Punkte  $z, z' \in \mathbb{C}$  liegen **symmetrisch zum Kreis  $C$** , falls gilt

$$(z - z_0)\overline{(z' - z_0)} = R^2$$

Die Abbildung  $z \rightarrow z'$  nennt man die **Inversion am Kreis  $C$**  oder auch **Spiegelung am Kreis  $C$** .

Graphische Darstellung der Spiegelung an der Tafel!

## Bemerkungen:

- Ein Punkt  $z$  mit  $|z - z_0| \leq R$  ist stets zu einem Punkt  $z'$  mit  $|z' - z_0| \geq R$  symmetrisch.
- Gilt  $|z - z_0| = R$ , so ist  $z$  zu sich selbst symmetrisch, d.h.  $z' = z$ .
- Der Punkt  $z = z_0$  ist zu  $z' = \infty$  symmetrisch.

# Möbius-Transformationen und Kreissymmetrien.

**Definition:** Zwei Punkte  $z, z'$  nennt man **symmetrisch zu einer Geraden** in  $\mathbb{C}$ , wenn  $z'$  aus  $z$  durch Spiegelung an der Geraden entsteht.

**Satz:**  
Möbius-Transformationen erhalten **Symmetrien** zu (verallgemeinerten) Kreisen.

**Genauer gilt:**

Ist  $C$  ein (verallgemeinerter) Kreis in  $\mathbb{C}^*$  und liegen  $z$  und  $z'$  symmetrisch zu  $C$ , so liegen die Bilder von  $z, z'$  unter einer Möbius-Transformation symmetrisch zu demjenigen (verallgemeinerten) Kreis in  $\mathbb{C}^*$ , der das Bild von  $C$  darstellt.

**Beispiel:** Gesucht ist eine Möbius-Transformation  $w = T(z)$ , die den Kreis  $|z| = 2$  auf den Kreis  $|w + 1| = 1$  abbildet mit  $T(-2) = 0$  und  $T(0) = i$ . Eine Möbius-Transformation ist eindeutig bestimmt, falls die Transformation von **drei** Punkten festgelegt ist. Wir haben aber nur

$$z_1 = -2, z_2 = 0 \quad \text{und} \quad w_1 = 0, w_2 = i$$

Uns fehlt also **ein** Punkt!

## Fortsetzung des Beispiels.

Nach dem letzten Satz erhalten Möbius-Transformationen die Symmetrie zu verallgemeinerten Kreisen.

$$z_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_3 = \infty \quad \text{ist symmetrisch zu } z_2 \text{ bzgl. des Kreises } |z| = 2$$

Daher ist  $w_3$  der zu  $w_2 = i$  symmetrische Punkt bezüglich des Kreises  $|w + 1| = 1$  und somit gegeben durch die Bedingung  $(w_2 + 1)\overline{(w_3 + 1)} = 1$ , also

$$w_3 = \frac{1}{2}(-1 + i)$$

Anwendung der **Dreipunkteformel** liefert

$$\frac{w - 0}{w - i} : \frac{w_3 - 0}{w_3 - i} = \frac{z + 2}{z - 0} : \frac{z_3 + 2}{z_3 - 0}$$

Was passiert mit dem Term

$$\frac{z_3 + 2}{z_3 - 0}$$

für  $z_3 \rightarrow \infty$ ?

# Komplettierung des Beispiels.

Was passiert mit dem Term

$$\frac{z_3 + 2}{z_3 - 0}$$

für  $z_3 \rightarrow \infty$ ?

Es gilt

$$\frac{z_3 + 2}{z_3 - 0} = \frac{1 + \frac{2}{z_3}}{1 + \frac{0}{z_3}} \rightarrow 1 \quad \text{für } z_3 \rightarrow \infty$$

Wir erhalten also

$$\left( \frac{w}{w - i} \right) : \left( \frac{\frac{1}{2}(-1 + i)}{\frac{1}{2}(-1 + i) - i} \right) = \left( \frac{z + 2}{z} \right)$$

und Auflösung nach  $w$  ergibt

$$w = T(z) = -\frac{z + 2}{(1 + i)z + 2i}$$

# Beispiel.

Für  $b > a > 0$  betrachten wir die Möbius-Transformation

$$w = T(z) = \frac{z + p}{-z + p} \quad \text{wobei } p = \sqrt{ab} \in (a, b)$$

Für die folgenden Auswertungen von  $T$  bekommen wir

$$z_{1,2} = \pm p \quad \rightarrow \quad w_{1,2} = \infty, 0$$

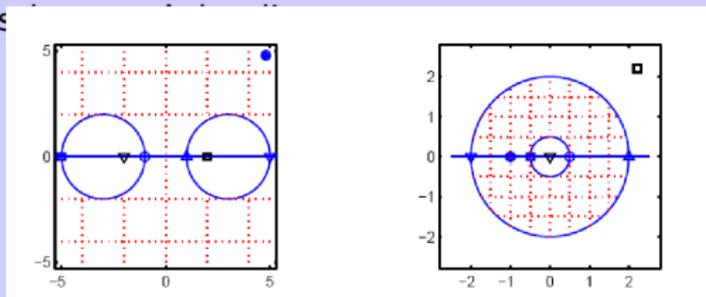
$$z_{3,4} = a, b \quad \rightarrow \quad w_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} = \pm \varrho \quad \text{mit } |\varrho| > 1$$

$$z_{5,6} = -a, -b \quad \rightarrow \quad w_{5,6} = \pm \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \pm \frac{1}{\varrho}$$

$$z_{7,8} = 0, \infty \quad \rightarrow \quad z_{7,8} = 1, -1.$$

# Fortsetzung des Beispiels.

- Die  $x$ -Achse wird durch  $T$  auf die  $u$ -Achse abgebildet.
- Punkte, die symmetrisch zur  $x$ -Achse liegen, werden auf Punkte abgebildet, die symmetrisch zur  $u$ -Achse liegen.
- Kreise, die symmetrisch zur  $x$ -Achse liegen, werden auf Kreise abgebildet, die symmetrisch zur  $u$ -Achse liegen.



**Relevante Anwendung:** Das elektrostatische Feld im Äußeren von zwei stromdurchflossenen parallelen Leitern wird in das Feld eines Zylinderkondensators abgebildet.

## 4.1 Komplexe Differentiation

**Definition:** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $D \subset \mathbb{C}$  eine komplexe Funktion. Dann heißt  $f(z)$  im Punkt  $z_0 \in D^0$  **komplex differenzierbar** mit Ableitung  $f'(z_0)$ , falls der folgende Grenzwert existiert,

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Ist  $f(z)$  in jedem Punkt eines Gebietes  $D$  komplex differenzierbar, so nennt man  $f(z)$  **holomorph**, **analytisch** oder **regulär** auf  $D$ .

### Bemerkung:

- 1 Der Grenzwertprozess  $z \rightarrow z_0$  erfolgt in der komplexen Ebene, d.h. die Richtung der Annäherung  $z \rightarrow z_0$  ist **beliebig**.
- 2 Die oben stehende Division ist die Division **komplexer** Zahlen.

## 4.1 Komplexe Differentiation

**Lemma:** Ist  $f(z)$  reellwertig, d.h.  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet, und ist  $f(z)$  holomorph auf  $D$ , dann ist  $f(z)$  eine konstante Funktion.

**Beweis:** Wir betrachten zuerst die Folge  $z_n \rightarrow z_0$  gegeben durch

$$z_n = z_0 + \frac{1}{n} \quad z_n - z_0 = \frac{1}{n} \in \mathbb{R}$$

Dann ist der Differenzenquotient für alle  $n \in \mathbb{N}$  reell, denn

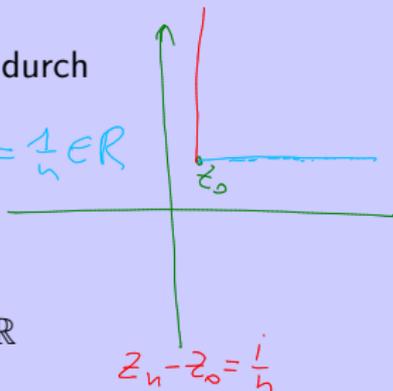
$$\frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} = n(f(z_n) - f(z_0)) \in \mathbb{R}$$

Dagegen liefert die Folge  $z_n \rightarrow z_0$  mit  $z_n = z_0 + i/n$  den rein imaginären Differenzenquotienten

$$\frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} = \frac{n}{i}(f(z_n) - f(z_0)) \in \mathbb{C} \quad = i(\quad)$$

Da aber die Funktion auf  $D$  holomorph ist, folgt

$$f'(z_0) = 0 \quad \text{für alle } z_0 \in D.$$



# Die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen.

**Bemerkung:** Ist die Funktion  $f(z)$  in  $z_0$  komplex differenzierbar, so folgt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \quad \text{bzw.} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0} = 0$$

bzw. äquivalent dazu

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|)$$

Sei nun  $f(z)$  im Punkt  $z_0$  komplex differenzierbar. Setzen wir

$$\gamma := f'(z_0),$$

so folgt nach obiger Bemerkung die äquivalente Schreibweise

$$f(z) = f(z_0) + \gamma(z - z_0) + \varepsilon(z)|z - z_0|$$

mit  $\varepsilon(z) \rightarrow 0$  für  $z \rightarrow z_0$ .

# Die Cauchy–Riemanschen Differentialgleichungen.

Wir verwenden nun mit  $z = x + iy$  die Darstellungen

$$f(z) = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

und

$$f'(z_0) = \gamma = \alpha + i\beta$$

Damit erhalten wir

$$\operatorname{Re}(f'(z_0) \cdot (z - z_0)) = \operatorname{Re}((\alpha + i\beta)((x - x_0) + i(y - y_0)))$$

$$u(z) = u(z_0) + \underbrace{\alpha(x - x_0) - \beta(y - y_0)}_{\operatorname{Re}(-i)} + \operatorname{Re}(\varepsilon(z)) \cdot |z - z_0|$$

$$v(z) = v(z_0) + \underbrace{\beta(x - x_0) + \alpha(y - y_0)}_{\operatorname{Im}(-i)} + \operatorname{Im}(\varepsilon(z)) \cdot |z - z_0|$$

In **Matrixschreibweise** lautet dies

$$\begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(z_0) \\ v(z_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \varepsilon(z) \cdot |z - z_0|$$

! nun 2 unterschiedliche Einträge

# Die Cauchy–Riemanschen Differentialgleichungen.

Wir interpretieren jetzt  $f(z)$  als eine vektorwertige, **total differenzierbare** Funktion zweier reeller Variablen, d.h.

mit der **Jakobi-Matrix**

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \rightarrow (u(x, y), v(x, y))$$
$$\begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x_0, y_0) \\ v(x_0, y_0) \end{pmatrix} + Jf(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2})$$
$$Jf(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \Big|_{(x_0, y_0)} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

**Satz:** Die Funktion  $f(z)$  ist im Punkt  $z_0 \in D$  genau dann komplex differenzierbar, wenn  $f(z)$  als Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dort total differenzierbar ist und die **Cauchy–Riemanschen Differentialgleichungen** gelten

$$u_x(z_0) = v_y(z_0)$$

$$u_y(z_0) = -v_x(z_0)$$

# Darstellung der komplexen Ableitung.

**Korollar:** Ist  $f(z)$  komplex differenzierbar in  $z_0 \in D$ , so folgt

$$f'(z_0) = u_x(z_0) + i v_x(z_0)$$

*= v\_y(z\_0) - i u\_y(z\_0)*

**Beweis:** Da  $f'(z_0) \in \mathbb{C}$  schreiben wir

$$f'(z_0) = \tilde{u}(z_0) + i \tilde{v}(z_0)$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \Delta f &= f'(z_0) \cdot (z - z_0) = (\tilde{u}(z_0) + i \tilde{v}(z_0)) \cdot [(x - x_0) + i(y - y_0)] \\ &= \tilde{u} \cdot (x - x_0) - \tilde{v} \cdot (y - y_0) + i(\tilde{v} \cdot (x - x_0) + \tilde{u} \cdot (y - y_0)) \end{aligned}$$

Da  $f$  in  $z_0$  total differenzierbar ist und die Cauchy-Riemanschen DGL's erfüllt sind, gilt ebenfalls

*$\tilde{u} = u_x \quad \tilde{v} = v_x$*

$$\Delta f = \begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \cdot (x - x_0) - v_x \cdot (y - y_0) \\ v_x \cdot (x - x_0) + u_x \cdot (y - y_0) \end{pmatrix}$$

# Holomorphe Funktionen und die Laplacegleichung.

**Satz:** Ist  $f \in \mathcal{C}^2$  holomorph auf  $D$ , so gilt

$$\Delta v = \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{xx} + v_{yy} = 0,$$

d.h. sowohl der Real- als auch der Imaginärteil von  $f$  erfüllen die Laplacegleichung.

**Beweis:** Ist  $f(z)$  holomorph, so folgt

$$\Delta u = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \stackrel{\text{C.R.}}{=} \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$$

$$\Delta v = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \stackrel{\text{C.R.}}{=} -\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0$$

Es gilt auch die folgende **Umkehrung**: Erfüllt  $u = u(x, y)$  auf einem zusammenhängenden Gebiet die Laplacegleichung  $\Delta u = 0$ , so existiert eine differenzierbare Funktion  $v = v(x, y)$ , sodass  $f(z) = u(z) + iv(z)$  auf  $D$  holomorph ist.

# Beweis der Umkehrung.

Sei  $u = u(x, y)$  mit  $\Delta u = 0$  gegeben. Gesucht ist eine Funktion  $v = v(x, y)$ , sodass die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sind, also

$$v_x = -u_y$$

$$v_y = u_x$$

Aus den C.R. DGL's folgt

$$\text{grad } v = (v_x, v_y) = (-u_y, u_x) =: V = (V_1, V_2)$$

Wir suchen also ein Potential  $v$  mit  $\text{grad } v = V$ . Unter der Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial x} = 0$$

ist die Existenz eines solchen Potentials gesichert.

Nun gilt aber

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial x} = -u_{yy} - u_{xx} = -\Delta u = 0$$

# Differentiationsregeln.

- Es gelten die folgenden Regeln:

$$(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0)$$

$$(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}$$

- **Kettenregel:** Ist  $f(z)$  differenzierbar in  $z_0$  und  $g(w)$  differenzierbar in  $w_0 = f(z_0)$ , so folgt

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$$

- **Ableitung der Umkehrfunktion:** Ist  $f(z)$  holomorph und  $f'(z_0) \neq 0$ , so ist  $f(z_0)$  um  $z_0$  lokal bijektiv und es gilt

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}, \quad w_0 = f(z_0)$$

# Die modifizierte Kettenregel.

**Lemma:** Ist  $f(z)$  holomorph auf  $D$  und ist  $c : [a, b] \rightarrow D$  eine  $C^1$ -Kurve in  $D$ , so gilt

$$\frac{d}{dt} f(c(t)) = f'(c(t)) \cdot \dot{c}(t)$$

**Beweis:** Zunächst gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(c(t)) &= \frac{d}{dt} u(c(t)) + i \frac{d}{dt} v(c(t)) \\ &= (u_x \dot{c}_1 + u_y \dot{c}_2) + i (v_x \dot{c}_1 + v_y \dot{c}_2) \end{aligned}$$

Daneben haben wir

$$\begin{aligned} f'(c(t)) \cdot \dot{c}(t) &= (u_x + i v_x) \cdot (\dot{c}_1 + i \dot{c}_2) \\ &= (u_x \dot{c}_1 - v_x \dot{c}_2) + i (v_x \dot{c}_1 + u_x \dot{c}_2) \end{aligned}$$

Beide Terme sind wegen der C.R. DGL's identisch.

# Beispiele.

## Beispiel 1:

Für  $f(z) = z$  erhalten wir wegen  $u(x, y) = x$  und  $v(x, y) = y$

$$f'(z) = u_x(z) + i v_x(z) = 1$$

Daraus folgt, dass komplexe Polynome auf  $\mathbb{C}$  holomorph sind mit

$$\frac{d}{dz} \left( \sum_{k=0}^n a_k z^k \right) = \sum_{k=1}^n a_k k z^{k-1}$$

$$(z^k)' = k z^{k-1}$$

Explizite Berechnung für  $f(z) = z^2$ : mit

$$f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + i 2xy$$

berechnet man

$$f'(z) = u_x(z) + i v_x(z) = 2x + i 2y = 2z$$

# Beispiele.

**Beispiel 2:** Rationale Funktionen, also Funktionen der Form

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}, \quad p, q \text{ komplexe Polynome}$$

sind an allen Stellen mit  $q(z) \neq 0$  komplex differenzierbar.

**Beispiel 3:** Die Exponentialfunktion  $f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$  ist komplex differenzierbar mit  $f'(z) = e^z$ , denn mit

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y$$

$u, v$   
(total) diff.

sind die C.R. DGL's erfüllt

$$u_x = v_y = e^x \cos y, \quad u_y = -v_x = -e^x \sin y$$

und es gilt

$$f'(z) = u_x + i v_x = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z$$

## Weitere Beispiele.

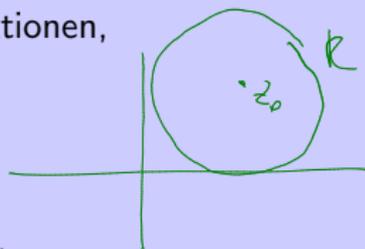
**Beispiel 4:** Die trigonometrischen Funktionen  $(\sin z)' = \frac{1}{2j} (e^{iz} - e^{-iz}) = \cos z$

$$\sin z := \frac{1}{2j} (e^{iz} - e^{-iz}), \quad \cos z := \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz})$$

sind nach Beispiel 3 holomorph auf  $\mathbb{C}$  und es gelten den reellen Funktionen analoge Formeln.

**Beispiel 5:** Durch komplexe Potenzreihen erklärte Funktionen,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$



sind auf ihrem Konvergenzbereich  $K_r(z_0)$  holomorph mit

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (z - z_0)^{k-1}$$

und damit auf  $K_r(z_0)$  gleichzeitig **beliebig oft** komplex differenzierbar.

## 4.2 Konforme Abbildungen

**Satz:** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion auf einem Gebiet  $D \subset \mathbb{C}$  mit  $f'(z) \neq 0$  für alle  $z \in D$ . Dann gilt lokal an einem Punkt  $z_0 \in D$ :

- Winkel** zwischen sich im Punkt  $z_0$  schneidender Kurven bleiben bei der Transformation  $w = f(z)$ , einschließlich des Umlaufsinn, erhalten,
- der Term  $|f'(z_0)|$  ist die für alle von  $z_0$  ausgehenden Richtungen gemeinsame **Längenverzerrung**. Insbesondere bleiben Längenverhältnisse erhalten.

Abbildungen mit diesen beiden Eigenschaften nennt man **konforme Abbildungen**.

Für konforme Abbildungen gilt die folgende **Umkehrung** des Satzes.

**Satz:** Ist  $w = f(z)$  eine konforme Abbildung und als Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  stetig differenzierbar, so ist  $f(z)$  komplex differenzierbar und es gilt  $f'(z) \neq 0$ .

# Beweis des ersten Satzes.

Seien  $c$  und  $d$  zwei Kurven, die für  $t = 0$  durch den Punkt  $z_0$  laufen. Die beiden Tangentialvektoren in diesem Punkt sind dann  $\dot{c}(0)$  und  $\dot{d}(0)$  und für den Winkel  $\gamma$  zwischen den Tangentialvektoren gilt

$$\gamma = \angle(\dot{c}(0), \dot{d}(0)) = \arg(\dot{d}(0)) - \arg(\dot{c}(0))$$

Mittels  $f$  erhalten wir die beiden Kurven  $f \circ c$  und  $f \circ d$  im Bildraum.

Der Winkel  $\tilde{\gamma}$  zwischen den beiden Kurven im Punkt  $f(z_0)$  im Bildraum lautet

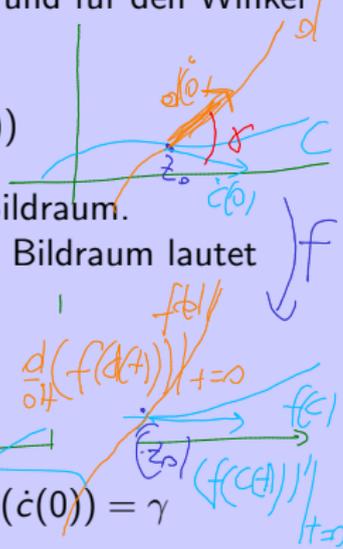
$$\begin{aligned}\tilde{\gamma} &= \angle(f'(z_0)\dot{c}(0), f'(z_0)\dot{d}(0)) \\ &= \arg(f'(z_0)\dot{d}(0)) - \arg(f'(z_0)\dot{c}(0)) \\ &= \arg(f'(z_0)) + \arg(\dot{d}(0)) - \arg(f'(z_0)) - \arg(\dot{c}(0)) = \gamma\end{aligned}$$

und bezüglich der Längenverzerrung berechnet man

Streckungsfaktor  
im Bild  $\rightarrow$

$$\left\| \frac{d}{dt}(f \circ c) \right\| = |f'(z_0)\dot{c}(0)| = |f'(z_0)| \cdot |\dot{c}(0)|$$

Streckungsfaktor  
im Urbild



# Konforme Transformationen.

**Definition:** Sei  $f : D \rightarrow D'$  eine bijektive und konforme Abbildung zwischen den beiden Gebieten  $D \subset \mathbb{C}$  und  $D' \subset \mathbb{C}$ . Weiterhin sei  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine **reellwertige** zweimal stetig differenzierbare Funktion auf  $D$ . Dann nennt man die Funktion  $\Psi : D' \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

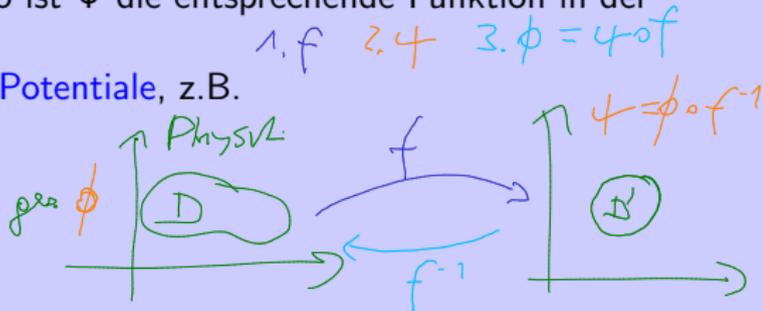
$$\Psi = \Phi \circ f^{-1}$$

die **konforme Transformation** von  $\Phi$  mit der Abbildung  $f$ .

**Physikalische Anwendungen:** Ist  $\Phi(z)$  eine gesuchte Potentialfunktion definiert in der **physikalischen Ebene**  $D$ , so ist  $\Psi$  die entsprechende Funktion in der **Modellebene**  $D'$ .

Im folgenden sind  $\Phi$  und  $\Psi$  also **Potentiale**, z.B.

- elektrostatische Potentiale;
- Strömungspotentiale;
- Temperaturfelder etc.



Dabei sind die Vektoren  $(\Phi_x, \Phi_y)$  und  $(\Psi_u, \Psi_v)$  von besonderem Interesse.

# Der komplexe Gradient.

**Definition:** Für eine reellwertige Funktion  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem Gebiet  $D \subset \mathbb{C}$  nennt man für  $z = x + iy$  den Ausdruck

$$\text{grad } \Phi(z) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

den **komplexen Gradienten** von  $\Phi(z)$ .

**Satz:** Sei  $\Psi$  die **konforme Transformation** von  $\Phi$  mit der Abbildung  $f$ . Dann gelten die beiden Beziehungen

$$\text{grad}_z \Phi(z) = \text{grad}_w \Psi(f(z)) \cdot \overline{f'(z)}$$

$$\Delta_z \Phi(z) = \Delta_w \Psi(f(z)) \cdot |f'(z)|^2$$

**Beweis:** Nach Definition ist die **konforme Transformation** von  $\Phi$  mit der Abbildung  $f$  gegeben durch

$$\Psi = \Phi \circ f^{-1}$$

## Fortsetzung des Beweises.

Daraus folgt aber  $\Phi = \Psi \circ f$  und mit  $f(x, y) = u(x, y) + i v(x, y)$

$$\varphi(u, v) = \varphi(f) = \Phi(x, y) = \Psi(u(x, y), v(x, y))$$

Wir berechnen nun

$$\Phi_x = \Psi_u u_x + \Psi_v v_x$$

$$\Phi_y = \Psi_u u_y + \Psi_v v_y$$

Für den **komplexen Gradienten** gilt dann wegen  $f'(z) = u_x + i v_x$

$$\begin{aligned} \Phi_x + i \Phi_y &= \text{grad } \Phi(z) = (\Psi_u u_x + \Psi_v v_x) + i(\Psi_u u_y + \Psi_v v_y) \\ &= \Psi_u (u_x + i u_y) + \Psi_v (v_x + i v_y) \\ &\stackrel{\text{C.R.}}{=} \Psi_u (u_x - i v_x) + i \Psi_v (u_x - i v_x) = (\Psi_u + i \Psi_v) (u_x - i v_x) \\ &= \text{grad } \Psi(f(z)) \cdot \overline{f'(z)} \end{aligned}$$

*Handwritten notes:*  $f'(z) = u_x + i v_x$  (circled in blue),  $\overline{f'(z)} = u_x - i v_x$  (circled in blue), and "C.R." (Cauchy-Riemann) is written in blue next to the terms  $(u_x + i u_y)$  and  $(u_x - i v_x)$ .

# Komplettierung des Beweises.

Die Berechnung der **zweiten Ableitungen** ergibt

$$\Phi_{xx} = \Psi_{uu}u_x^2 + 2\Psi_{uv}u_xv_x + \Psi_{vv}v_x^2 + \Psi_u u_{xx} + \Psi_v v_{xx}$$

$$\Phi_{yy} = \Psi_{uu}u_y^2 + 2\Psi_{uv}u_yv_y + \Psi_{vv}v_y^2 + \Psi_u u_{yy} + \Psi_v v_{yy}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \Phi_{xx} + \Phi_{yy} = \Delta\Phi &= \underbrace{\Psi_{uu}(u_x^2 + u_y^2)} + \cancel{2\Psi_{uv}(u_xv_x + u_yv_y)} + \underbrace{\Psi_{vv}(v_x^2 + v_y^2)} + \cancel{\Psi_u \Delta u} + \cancel{\Psi_v \Delta v} \\ &= (\Psi_{uu} + \Psi_{vv}) |f'(z)|^2 \end{aligned}$$

$f(z) = u_x - iv_y$   
 $u_x = v_y$   
 $u_y = -v_x$

Wir verwenden nun wieder die C.R. DGL's und erhalten

$$u_x^2 + u_y^2 = v_x^2 + v_y^2 = u_x^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2$$

$$\underbrace{u_x v_x + u_y v_y}_{v_y - u_y} = 0$$

$$\Delta u = \Delta v = 0$$

und damit das gewünschte Resultat

$$\Delta\Phi = \Delta\Psi \cdot |f'(z)|^2$$

# Zur praktischen Anwendung konformer Transformationen.

**Korollar:** Bei konformen Transformation gehen harmonische Funktionen in harmonische Funktionen über.

**Anwendung konformer Transformationen:** Gegeben sei das **Dirichlet–Problem** für die Laplacegleichung, d.h. die Randwertaufgabe

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } D \\ u = g & \text{auf } \partial D \end{cases}$$

wobei  $D \subset \mathbb{R}^2$  ein “kompliziertes” zweidimensionales Gebiet sei.

Mit Hilfe einer geeigneten **konformen Transformation** läßt sich das Problem nach folgender Vorgehensweise sogar explizit lösen.

- 1 suche eine konforme Transformation, die das physikalische Gebiet  $D$  auf das “einfache” Modellgebiet  $D'$  transformiert;
- 2 transformiere die Randbedingungen auf  $\partial D$  zu Randbedingungen auf  $\partial D'$  und löse das Dirichlet–Problem auf  $D'$ ;
- 3 transformiere die Lösung zurück auf das physikalische Gebiet  $D$ .

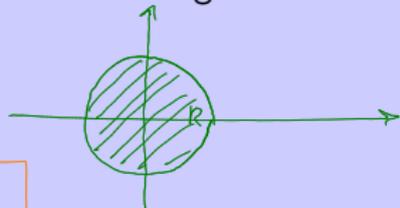
# Ein Anwendungsbeispiel: Ebene Potentialströmungen.

Wir wollen das Geschwindigkeitsfeld einer stationären, wirbel- und quellenfreien Umströmung eines Zylinders berechnen. Sei dazu  $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  das gesuchte Geschwindigkeitsfeld.

Dann gelten die Gleichungen

$$\boxed{\operatorname{rot} w} = \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial y} = 0$$

$$\boxed{\operatorname{div} w} = \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y} = 0$$



Ist  $D \subset \mathbb{R}^2$  einfach zusammenhängend, so folgt aus der ersten Bedingung

es existiert eine Funktion  $u : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\nabla u = -w$

und aus der zweiten Bedingung

es existiert eine Funktion  $v : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\nabla v = (w_2, -w_1)^T$

# Das komplexe Strömungspotential.

Man nennt

- die Funktion  $u$  das **Geschwindigkeitspotential**;
- die Funktion  $v$  die **Stromfunktion**.

$w = (w_1, w_2)$

Die zur Stromfunktion gehörenden **Stromlinien** sind Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung  $y'(x) = w_2/w_1$  und gegeben durch

$$v(x, y) = \text{const.}$$

$$(u_x, u_y) = (-w_1, -w_2)$$
$$(v_x, v_y) = (w_1, -w_2)$$

**Definition:** Die komplexe Funktion  $\Phi = \Phi(x, y)$  definiert durch

$$\Phi(x, y) = u(x, y) + i v(x, y)$$

nennt man **komplexes Strömungspotential**.

Das komplexe Strömungspotential  $\Phi(z)$  ist eine holomorphe Funktion, denn es gelten die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen

$$u_x - v_y = -w_1 - (-w_1) = 0$$

$$u_y + v_x = -w_2 + w_2 = 0$$



# Fortsetzung: Ebene Potentialströmungen.

Das Geschwindigkeitsfeld  $w$  läßt sich direkt berechnen: wegen

$$\Phi'(z) = u_x + i v_x = -w_1 + i w_2$$

folgt

$$w = w_1 + i w_2 = -\overline{\Phi'(z)} = -\overline{-w_1 + i w_2} = w_1 + i w_2$$

*(Handwritten note:  $-(w_1 + i w_2) =$  with an arrow pointing to the right-hand side of the equation)*

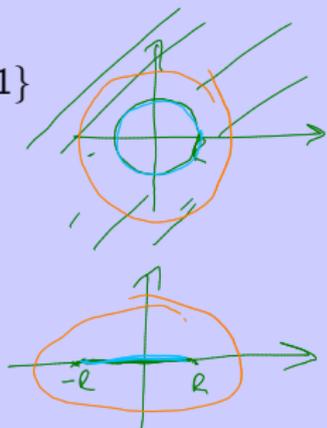
Unser **physikalisches Gebiet** ist gegeben durch  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$  und das entsprechende **Modellgebiet** ist

$$D' = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z \neq 0 \text{ <sup>oder</sup> } |\text{Re } z| > 1\}$$

Die Joukowski-Funktion  $f(z)$  gegeben durch

$$w = f(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{z}{R} + \frac{R}{z} \right)$$

ist eine **konforme Transformation** von  $D$  auf  $D'$ .



## Fortsetzung: Ebene Potentialströmungen.

In der **Modellebene** können wir annehmen, dass ein homogenes Geschwindigkeitsfeld vorliegt, d.h. in  $D'$  gilt

$$W = \text{const.} = (V_\infty, 0)^T$$



da eine unendlich dünne Platte eine gegebene homogene Strömung in Richtung der reellen Achse und Geschwindigkeit  $V_\infty$  nicht beeinflusst.

Für das **Geschwindigkeitspotential**  $U(\overset{w}{W})$  gilt dann die Gleichung

$$\text{grad } U(\overset{w}{W}) = -(V_\infty, 0)^T = (U(w)_{w_1}, U(w)_{w_2})$$

und daraus folgt

$$U(w) = -\cancel{V_\infty} w_1 = -V_\infty w_1$$

Entsprechend ergibt sich für die **Stromfunktion**  $V(W)$

$$\text{grad } V(\overset{w}{W}) = (0, -V_\infty)^T \Rightarrow V(w) = -\cancel{V_\infty} w_2 = -V_\infty w_2$$

# Fortsetzung: Ebene Potentialströmungen.

In der **physikalischen Ebene** können wir annehmen, dass

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \text{grad } \Phi(z) = -v_{\infty} = -v_{\infty} + i0$$

gilt, d.h. im Unendlichen spürt die ungestörte Strömung kein Hindernis.

Wegen der Beziehung

$$\text{grad } \Phi(z) = \text{grad } \Psi(f(z)) \cdot \overline{f'(z)}$$

folgt mit

$$f'(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R} - \frac{R}{z^2} \right) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \frac{1}{2R}$$

die Beziehung  $V_{\infty} = 2Rv_{\infty}$ .

Für das **komplexe Strömungspotential** gilt dann

$$\begin{aligned} &= -V_{\infty} w_1 - i V_{\infty} w_2 = -V_{\infty} (w_1 + i w_2) = -2Rv_{\infty} (w_1 + i w_2) \\ \Psi(W) &= -2Rv_{\infty} (\underbrace{\text{Re } W}_{w_1} + i \underbrace{\text{Im } W}_{w_2}) \end{aligned}$$

## Fortsetzung: Ebene Potentialströmungen.

Wir betrachten nun die **Rücktransformation** in die physikalische Ebene, d.h.

$$\Phi(z) = (\Psi \circ f)(z) = -2Rv_\infty(\operatorname{Re} f(z) + i \operatorname{Im} f(z))$$

Für die Joukowski-Funktion

$$= u + i v$$

$$f(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{z}{R} + \frac{R}{z} \right) \quad z = x + iy$$

gilt offensichtlich

$$\frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{x}{R} + \frac{Rx}{x^2 + y^2} \right) \quad \operatorname{Im} f(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{y}{R} - \frac{Ry}{x^2 + y^2} \right)$$

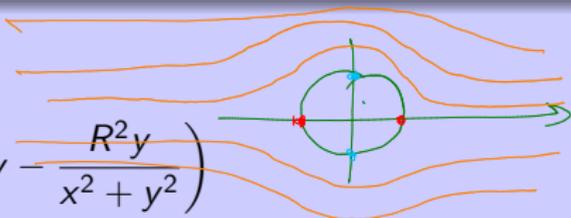
Damit ergibt sich in der physikalischen Ebene das **Geschwindigkeitspotential**  $u(z)$

$$u(z) = u(x, y) = -v_\infty \left( x + \frac{R^2 x}{x^2 + y^2} \right)$$

## Fortsetzung: Ebene Potentialströmungen.

Entsprechend ergibt sich für die **Stromfunktion**

$$v(z) = v(x, y) = -v_\infty \left( y - \frac{R^2 y}{x^2 + y^2} \right)$$



Das **Geschwindigkeitsfeld**  $w$  um den Zylinder ist dann gegeben durch

$$w = -\nabla u = -v_\infty \left( \frac{(x^2 + y^2)^2 - R^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, -\frac{2R^2 xy}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

Insbesondere gilt:

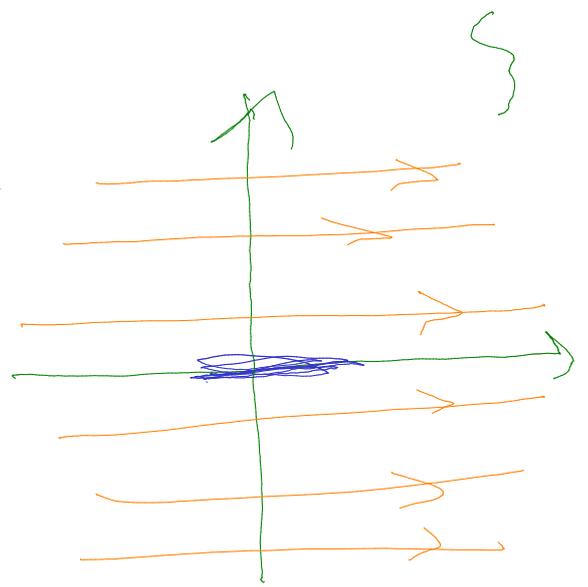
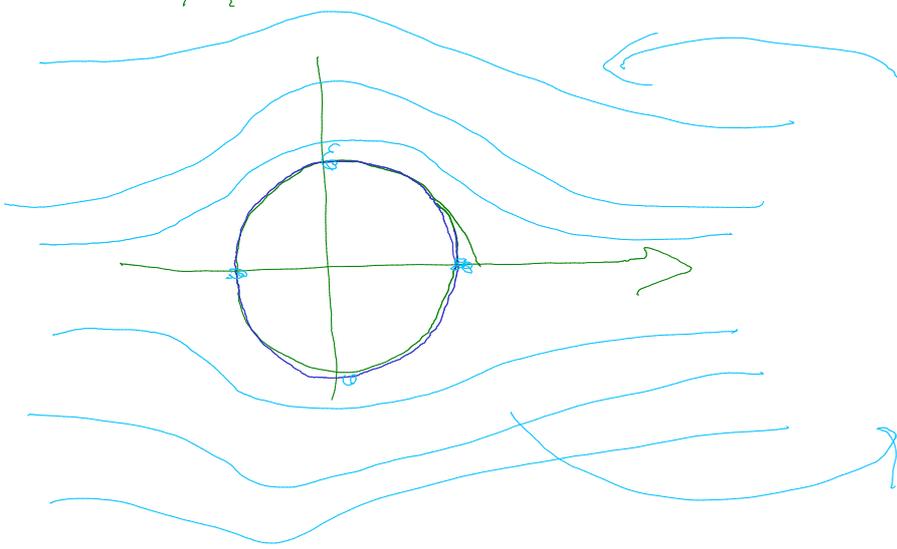
- In den beiden **Staupunkten**  $(-R, 0)$  und  $(R, 0)$  ist die Geschwindigkeit gleich Null,

$$w(-R, 0) = w(R, 0) = (0, 0)^T$$

- Die Geschwindigkeit ist **maximal** in den beiden Punkten  $(0, -R)$  und  $(0, R)$  mit

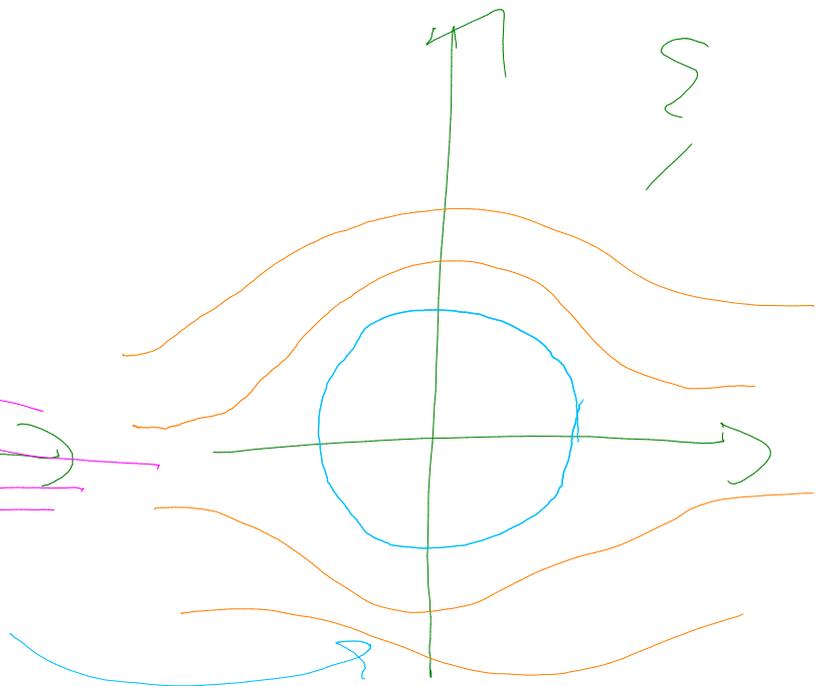
$$w_{\max} = 2v_\infty$$

114



Jankowski erdyei Abb (Konform)

Karmon-Treffitz



$$z = nb \frac{(\zeta + b)^n + (\zeta - b)^n}{(\zeta + b)^n - (\zeta - b)^n}$$

Konform

# Kapitel 5. Komplexe Integration

## 5.1 Beispiele zur komplexen Integration

**Definition:** Eine komplexwertige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  einer reellen Variablen ist **integrierbar**, falls der Real- und Imaginärteil von  $f$  integrierbar sind, und es gilt:

$$\int_a^b f(t) dt := \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt = \operatorname{Re} e^{i\varphi}$$

Es gelten zu dem Reellen analoge Eigenschaften, wie zum Beispiel **Linearität**. Weiter gilt stets

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

**Beweis:** Man berechnet

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) dt \right| &= R = e^{-i\varphi} \int_a^b \overbrace{f(t)}^{\operatorname{Re} i\varphi} dt = \int_a^b \underbrace{e^{-i\varphi} f(t)}_{\in \mathbb{R}} dt = \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\varphi} f(t)) dt \\ &\leq \int_a^b |e^{-i\varphi} f(t)| dt = \int_a^b |f(t)| dt \end{aligned}$$

*(Handwritten notes:  $(\operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f) = \operatorname{Re} e^{i\varphi}$ )*

# Komplexe Integration analog zu Kurvenintegralen.

**Reelle Analysis:** Sei  $c : [a, b] \rightarrow D \subset \mathbb{R}^n$  ein stückweiser  $C^1$ -Weg,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  gegeben. Dann hatten wir in Analysis II und III die beiden Kurvenintegrale 1. und 2. Art

$$\int_c f(x) ds := \int_a^b f(c(t)) \|\dot{c}\| dt$$

bzw.

$$\int_c F(x) dx := \int_a^b \langle F(c(t)), \dot{c}(t) \rangle dt$$

**Definition:** Sei  $D \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und  $c : [a, b] \rightarrow D$  ein stückweiser  $C^1$ -Weg. Dann ist

$$\int_c f(z) dz := \int_a^b f(c(t)) \dot{c}(t) dt = \int_{t=d(s)}^{t=d(b)} f(c(d(s))) \dot{c}(d(s)) \underbrace{d'(s)}_{\tilde{c}(s)} ds$$

*Integral einer reellen Variable*  
 $t = d(s)$   $d^{-1}(b)$   
 $dt = \frac{dt}{ds} ds$   $d^{-1}(a)$   $\tilde{c}(s)$   
 $= \int f(\tilde{c}(s)) \tilde{c}'(s) ds$

das **komplexe Integral** von  $f(z)$  längs der Kurve  $c$ .

# Eigenschaften des komplexen Integrals.

- Der Wert des komplexen Integrals ist **unabhängig** von der Parametrisierung der Kurve.
- Bei Änderung der **Durchlaufrichtung** gilt

$$\int_{-c} f(z) dz = - \int_c f(z) dz$$

Hier ist  $(-c)(t) := c(b + t(a - b))$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

- **Linearität**

$$\int_c (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \int_c f(z) dz + \beta \int_c g(z) dz \quad \text{für } \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

- **Additivität** bzgl. des Integrationsweges:

$$\int_{c_1+c_2} f(z) dz = \int_{c_1} f(z) dz + \int_{c_2} f(z) dz$$

# Weitere Eigenschaft des komplexen Integrals

Es gilt die Abschätzung

$$\left| \int_c f(z) dz \right| \leq \sup_{z \in \text{Bild}(c)} |f(z)| \cdot \underbrace{\int_a^b |\dot{c}(t)| dt}_{\text{Bogenlänge } L(c)}$$

**Beweis** Man berechnet direkt

$$\begin{aligned} \left| \int_c f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(c(t)) \dot{c}(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(c(t))| |\dot{c}(t)| dt \\ &\leq \sup_{a \leq t \leq b} |f(c(t))| \cdot \int_a^b |\dot{c}(t)| dt \end{aligned}$$

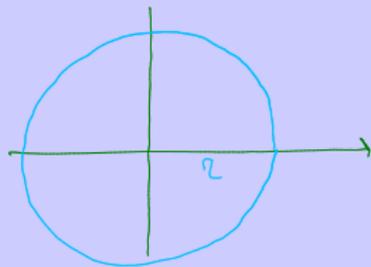
# Ein Beispiel für komplexe Integrale.

## Beispiel 1:

$$z(t) = r i e^{it}$$

Sei  $f(z) = z$  und  $c(t) = r e^{it}$  mit  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \oint_c z \, dz &= \int_0^{2\pi} \underbrace{r e^{it}}_z \cdot \underbrace{(r i e^{it})}_{z'} \, dt \\ &= i r^2 \int_0^{2\pi} e^{2it} \, dt \\ &= i r^2 \int_0^{2\pi} (\cos(2t) + i \sin(2t)) \, dt \\ &= -r^2 \int_0^{2\pi} \sin(2t) \, dt + i r^2 \int_0^{2\pi} \cos(2t) \, dt \\ &= 0 \end{aligned}$$



# Weitere Beispiele zu komplexen Integralen.

$$f(z) = \bar{z} = x - iy \quad u = x \quad v = -y \quad 1 = u_x \neq v_y = -1 \quad \text{nicht differenzierbar}$$
$$0 = u_y = -v_x = 0$$

## Beispiel 2:

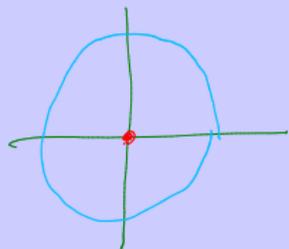
Sei  $f(z) = \bar{z}$  und  $c(t) = re^{it}$  mit  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Dann gilt

$$\oint_c \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} \underbrace{re^{-it}}_{\bar{z}} \cdot \underbrace{(rie^{it})}_{c'} dt = ir^2 \int_0^{2\pi} dt = r^2 \cdot 2\pi i$$

## Beispiel 3:

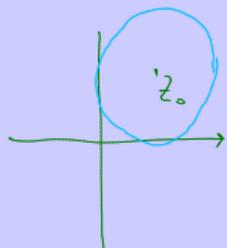
Sei  $f(z) = 1/z$  und  $c(t) = re^{it}$  mit  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Dann gilt

$$\oint_c \frac{1}{z} dz = \oint_c \frac{\bar{z}}{|z|^2} dz = \frac{1}{r^2} \oint_c \bar{z} dz = 2\pi i$$



**Beispiel 4:** Es gilt mit  $c(t) = z_0 + re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  die Beziehung

$$\oint_c (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{für } n = -1 \\ 0 & \text{für } n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \end{cases}$$



# Fortsetzung des letzten Beispiels.

Beispiel 4:

$$z = z_0 + r e^{it}$$

$$\begin{aligned} \oint_C (z - z_0)^n dz &= \int_0^{2\pi} \underbrace{(re^{it})^n}_{(z-z_0)^n} \cdot \underbrace{(rie^{it})}_{\dot{z}} dt = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt \\ &= r^{n+1} \left( - \int_0^{2\pi} \sin((n+1)t) dt + i \int_0^{2\pi} \cos((n+1)t) dt \right) \\ &= \begin{cases} 2\pi i & \text{für } n = -1 \\ 0 & \text{für } n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \end{cases} \end{aligned}$$

Nur für  $n = -1$  verschwindet das Integral nicht und es gilt

$$\oint_C \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i$$

Frage: Woran liegt das?

# Gleichmäßige Konvergenz bei komplexen Integralen.

**Satz:** Ist  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$  eine Reihe stetiger Funktionen, die auf dem Gebiet  $D \subset \mathbb{C}$  **gleichmäßig konvergiert**, und ist  $c : [a, b] \rightarrow D$  ein stückweiser  $\mathcal{C}^1$ -Weg, so gilt

$$\int_c f(z) dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int_c f_k(z) dz$$

*Integration und  
Summation  
vertauschen*

**Beweis:** Da die Reihe stetiger Funktionen gleichmäßig konvergiert, ist auch die Grenzfunktion  $f(z)$  stetig und daher auch integrierbar und

$$\int_c f(z) dz - \sum_{k=0}^n \int_c f_k(z) dz = \int_c R_n(z) dz$$

**Gleichmäßige** Konvergenz bedeutet

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \underline{N(\varepsilon)} : \forall n \geq N, z \in D : |R_n(z)| < \varepsilon$$

*nicht  $\exists N(\varepsilon, z)$*

## Fortsetzung des Beweises.

Aus der gleichmäßigen Konvergenz folgt sofort

$$\left| \int_c R_n(z) dz \right| \leq \varepsilon \cdot L(c)$$

und damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_c R_n(z) dz = 0$$

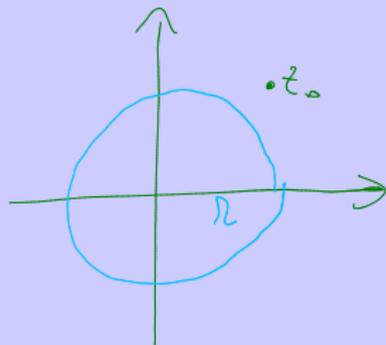
**Beispiel:** Sei

$$c(t) = re^{it} \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 2\pi$$

und  $|z_0| > r$ . Dann gilt:

$$\oint_{|z|=r} \frac{dz}{z - z_0} = 0$$

**Beachte:** Der Punkt  $z_0$  liegt außerhalb des Kreises  $c(t)$ .



## Fortsetzung des letzten Beispiels.

$$\frac{1}{z-z_0} = -\frac{1}{z_0} \left( \frac{1}{1-\frac{z}{z_0}} \right) = -\frac{1}{z_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{z}{z_0} \right)^k \quad \forall \left| \frac{z}{z_0} \right| < 1$$

Man berechnet direkt unter Verwendung der geometrischen Reihe

$$\oint_{|z|=r} \frac{dz}{z-z_0} = -\frac{1}{z_0} \oint_{|z|=r} \frac{dz}{1-\frac{z}{z_0}} = -\frac{1}{z_0} \oint_{|z|=r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z_0^k} z^k dz$$

denn es gilt

$$\left| \frac{z}{z_0} \right| < 1$$

weil  $z_0$  außerhalb  
des Kreises um  $0$   
mit Radius  $R$

Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz gilt

$$\frac{1}{z_0} \oint_{|z|=r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z_0^k} z^k dz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z_0^{k+1}} \oint_{|z|=r} z^k dz = 0$$

da man Integration und Summation vertauschen kann.

# Vorgriff auf die Laurent-Reihe.

**Beispiel:** Eine Reihe der Form

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k}_{\text{analog zur Taylor-Reihe}} + \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z - z_0)^k}_{\text{negative Potenzen}}$$

Handw.  $R_2$       $\left(\frac{1}{z-z_0}\right)^k$

nennt man eine **Laurent-Reihe**.

Sie konvergiert lokal gleichmäßig und absolut in einem **Kreisring**

$$0 \leq R_1 < |z - z_0| < R_2 \rightarrow$$

Für  $R_1 < r < R_2$  und  $c(t) = z_0 + re^{it}$   $0 \leq t \leq 2\pi$  gilt daher

$$\oint_{|z-z_0|=r} f(z) dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \oint_{|z-z_0|=r} (z - z_0)^k dz = 2\pi i a_{-1}$$

$k = -1$

$\left|\frac{1}{z-z_0}\right| < R_1 \Leftrightarrow |z-z_0| > \frac{1}{R_1} = R_2$



R

## 5.2 Der Cauchysche Hauptsatz

Wir hatten im Abschnitt 5.1 mit der Kurve  $c(t) = z_0 + re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  die Aussage

$$\oint_c (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{für } n = -1 \\ 0 & \text{für } n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \end{cases}$$

**Frage:** Wann verschwindet das Integral über geschlossene Kurven?

**Satz:** (Cauchyscher Integralsatz, Hauptsatz der Funktionentheorie)

Ist  $G \subset \mathbb{C}$  ein **einfach zusammenhängendes** Gebiet,  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  eine **holomorphe** Funktion und  $c : [a, b] \rightarrow G$  eine **geschlossene** stückweise  $\mathcal{C}^1$ -Kurve, so gilt stets

$$\oint_c f(z) dz = 0$$

# Bemerkung zum Cauchyschen Integralsatz.

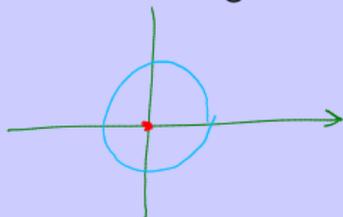
Alle drei Voraussetzungen sind wichtig und zusammen hinreichend

- ❶ Die Funktion  $f(z) = \bar{z}$  ist nicht holomorph und es gilt

$$\oint_{|z|=1} \bar{z} dz \neq 0$$

- ❷ Das Gebiet  $G = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}$  ist nicht einfach zusammenhängend und es gilt

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z} dz \neq 0$$



- ❸ Die Kurve  $c(t) = e^{(1+i)t}$  mit  $0 \leq t \leq 2\pi$  ist nicht geschlossen und es gilt

$$\int_c z dz \neq 0$$



# Beweis des Cauchyschen Integralsatzes.

**Beweis:** Wir setzen  $c(t) = (x(t), y(t))^T$  und  $f(x, y) = u(x, y) + i v(x, y)$ :

$$\begin{aligned} \oint_c f(z) dz &= \int_a^b (u\dot{x} - v\dot{y}) dt + i \int_a^b (u\dot{y} + v\dot{x}) dt \\ &= \oint_c \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} dx + i \oint_c \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} dx \end{aligned}$$

*Handwritten notes:*

- $f \dot{c} = (u+iv)(\dot{x}+i\dot{y})$
- $(u, -v) \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$
- $(v, u) \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$
- C.R. 2:  $u_y = -v_x \checkmark$
- C.R. 1:  $v_y = u_x \checkmark$

Bei beiden Vektorfelder  $(u, -v)^T$  und  $(v, u)^T$  ist wegen der C.R. DGL's die Integrabilitätsbedingung erfüllt:

$$\text{rot} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} = u_y + v_x = 0, \quad \text{rot} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} = v_y - u_x = 0$$

Daher existiert ein **Potential** und beide Integrale sind wegen der **geschlossenen Kurve**  $c$  identisch gleich Null.

# Die Stammfunktion einer holomorphen Funktion.

**Korollar:** Ist  $G \subset \mathbb{C}$  einfach zusammenhängend,  $f(z)$  holomorph auf  $G$  und  $c_1, c_2 : [a, b] \rightarrow G$ , so folgt aus  $c_1(a) = c_2(a)$  und  $c_1(b) = c_2(b)$  direkt

$$\int_{-c_1}^{c_2} f(z) dz = \int_{c_2}^{-c_1} f(z) dz = \int_{c_1}^{c_2} f(z) dz = \int_{c_2}^{c_1} f(z) dz$$

d.h. das Integral  $\int_c f(z) dz$  ist **wegunabhängig**.

**Satz: (Existenz einer Stammfunktion)**

Sei  $G \subset \mathbb{C}$ ,  $f(z)$  holomorph auf  $G$ ,  $z_0 \in G$  ein fester Punkt und setze für  $z \in G$

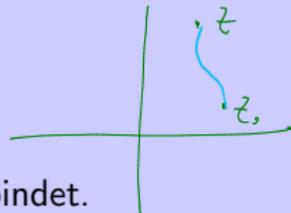
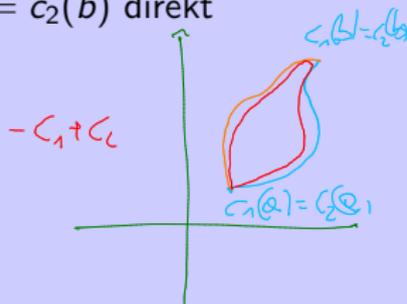
unabhängig von  $C$

$$F(z) := \int_{c_z} f(\xi) d\xi$$

mit einer beliebigen stückweisen  $C^1$ -Kurve, die  $z_0$  und  $z$  verbindet.

Dann ist  $F(z)$  eine **Stammfunktion** von  $f(z)$ , d.h. es gilt

$$F'(z) = f(z)$$



# Beweis des letzten Satzes.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} &= \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(\xi) d\xi = \frac{1}{h} \int_0^1 f(z+th) h dt \\ &= \int_0^1 f(z+th) dt \end{aligned}$$

*Handwritten notes:*  $z+h$  and  $z$  with arrows pointing to the upper and lower limits of the first integral.  $\xi = z+th$  and  $(z, z+h) \rightarrow (0,1)$  with an arrow pointing to the substitution in the second integral.  $\frac{d\xi}{dt} = h$  in the top right.

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &= \left| \int_0^1 (f(z+th) - f(z)) dt \right| \\ &\leq \sup_{t \in [0,1]} |f(z+th) - f(z)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

*Handwritten notes:*  $\int_0^1 f(z) dt$  with a double slash  $//$  next to it.  $L(\xi) = 1$  with an arrow pointing to the limit  $\rightarrow 0$ .

für  $h \rightarrow 0$ .

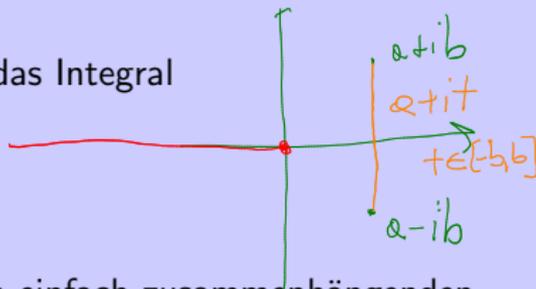
# Berechnung komplexer Integrale mittels Stammfunktion.

**Korollar:** Ist  $f(z)$  auf einem **einfach zusammenhängenden** Gebiet  $G$  **holomorph** und  $F(z)$  eine **Stammfunktion** von  $f(z)$ , so gilt für alle stückweisen  $C^1$ -Kurven  $c : [a, b] \rightarrow G$

$$\int_c f(z) dz = F(c(b)) - F(c(a))$$

**Beispiel:** Wir betrachten mit  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a, b > 0$  das Integral

$$\int_{a-ib}^{a+ib} \frac{dz}{z^2}$$



Die Funktion  $f(z) = 1/z^2$  ist **holomorph** auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet

$$G = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\},$$

also die komplexe Ebene ohne die negative reelle Achse.

Insbesondere ist das obenstehende Integral **wegunabhängig**.

# Forsetzung des Beispiels.

Direkte Integration: Wir setzen den Integrationsweg

$$c(t) = a + i t, \quad \text{für } -b \leq t \leq b$$

$$\dot{c}(t) = i$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \int_c \frac{dz}{z^2} &= \int_{-b}^b \frac{i}{(a + i t)^2} dt = - \frac{1}{a + i t} \Big|_{-b}^b \\ &= \frac{1}{a - i b} - \frac{1}{a + i b} = \frac{2ib}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

*direkte  
Integration*

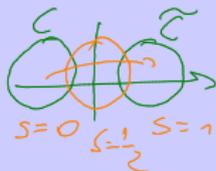
Auf der anderen Seite berechnet man mit Hilfe der **Stammfunktion**

$$\int_{a-ib}^{a+ib} \frac{dz}{z^2} = \left( -\frac{1}{z} \right) \Big|_{a-ib}^{a+ib} = \frac{2ib}{a^2 + b^2}$$

# Homotope Kurven.

**Definition:** Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet,  $c, \tilde{c} : [a, b] \rightarrow G$  zwei geschlossene Kurven in  $G$ . Man nennt  $c$  und  $\tilde{c}$  **homotop**, falls eine stetige Abbildung

$\Phi : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow G$  existiert mit  $\Phi(t, s) = (1-s)c(t) + s\tilde{c}(t)$



$$\Phi(t, 0) = c(t) \quad \text{für alle } t \in [a, b]$$

$$\Phi(t, 1) = \tilde{c}(t) \quad \text{für alle } t \in [a, b]$$

$$\Phi(a, s) = \Phi(b, s) \quad \text{für alle } s \in [0, 1]$$

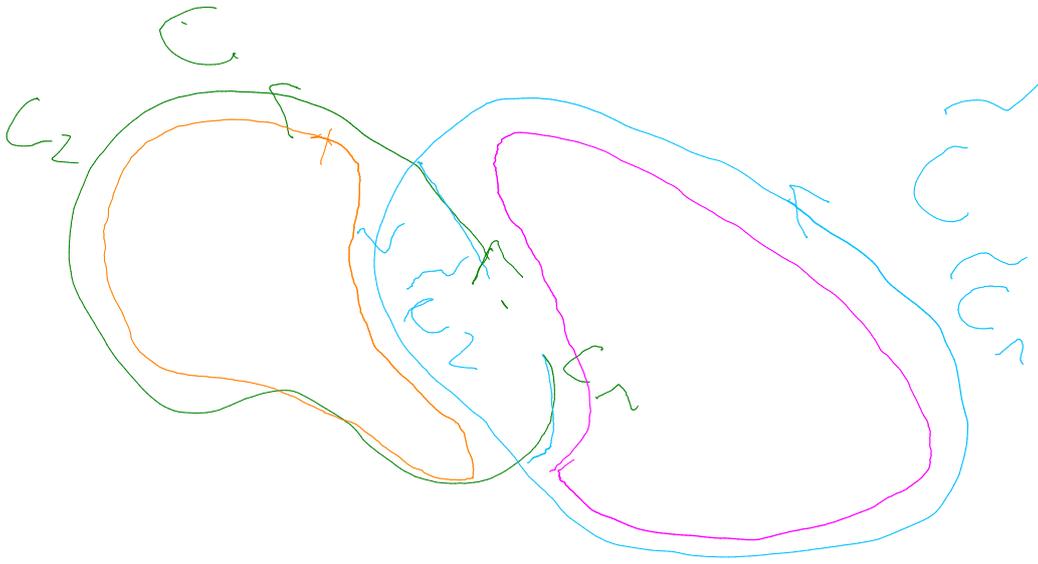
Eine geschlossene Kurve  $c$  heißt **nullhomotop**, falls sie sich in  $G$  stetig auf einen Punkt zusammenziehen läßt.



Damit folgt aus dem **Cauchyschen Integralsatz**:

Sei  $f(z)$  holomorph auf einem Gebiet  $G$ . Dann gilt für zwei geschlossene Wege  $c$  und  $\tilde{c}$ :

$$c, \tilde{c} \text{ homotop} \quad \Rightarrow \quad \oint_c f(z) dz = \oint_{\tilde{c}} f(z) dz$$



$$\oint_C f(z) dz = \int_{C_1} + \int_{C_2} = \underbrace{\int_{C_2} - \int_{\tilde{C}_2}}_{\text{orange}} + \int_{\tilde{C}_2}$$

$$+ \int_{C_3} \neq \int_{\tilde{C}_3} + \int_{C_4}$$

$$= \underbrace{\int_{C_2 - \tilde{C}_1}}_{=0} + \underbrace{\int_{C_1 - \tilde{C}_1}}_{=0} + \int_{C_2} + \int_{\tilde{C}_1}$$



$$\int_C = \int_C + \int_{C_3} - \int_{C_2} - \int_{C_3} = 0$$

$$\Rightarrow \int_C f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz$$

# Beispiel und Definition der Umlaufzahl.

**Beispiel:** Für jede einfach geschlossene Kurve  $c$ , die den Punkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  (einmal) im positiven Sinn umläuft, gilt

$$\oint_c \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$$



Denn  $c(t)$  ist homotop zu  $\tilde{c}(t) = z_0 + e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

**Definition:** Für eine geschlossene, stückweise  $\mathcal{C}^1$ -Kurve  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$  heißt

$$\text{Uml}(c, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{dz}{z - z_0}$$

die **Umlaufzahl** von  $c$  bezüglich des Punktes  $z_0$ .

Die Umlaufzahl ist stets eine ganze Zahl und gibt an, wie oft der Weg  $c$  den Punkt  $z_0$  in mathematisch positivem Sinne umläuft.

## 5.3 Die Cauchysche Integralformel, Taylor-Entwicklung

### Satz: (Cauchysche Integralformel)

Sei  $f(z)$  holomorph auf einem Gebiet  $G$ ,  $z_0 \in G$  und  $c : [a, b] \rightarrow G \setminus \{z_0\}$  ein zum Punkt  $z_0$  homotoper Weg, der  $z_0$  im positiven Sinn einmal umläuft. Dann gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

### Beweis:

Der Weg  $c$  läßt sich innerhalb von  $G \setminus \{z_0\}$  auf einen Kreis  $K_r(t) = z_0 + re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  zusammenziehen. Daher gilt

$$\oint_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{K_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt$$

*K<sub>r</sub>(t)*

## Fortsetzung des Beweises.

Daher gilt

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \oint_{K_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{\cancel{re^{it}}} i \cancel{re^{it}} dt \\ &= i \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt\end{aligned}$$

Im Grenzfall  $r \rightarrow 0$  erhalten wir offensichtlich die Beziehung

$$i \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt \longrightarrow 2\pi i f(z_0)$$

Da das Integral  $\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$  aber unabhängig von  $r$  ist, folgt

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

# Bemerkungen zur Cauchyschen Integralformel.

- Für einen beliebigen  $z_0$ -homotopen Weg in  $G \setminus \{z_0\}$ , der den Punkt  $z_0$  nicht notwendigerweise genau einmal durchläuft, gilt entsprechend

$$\oint_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i \cdot \text{Uml}(c, z_0) \cdot f(z_0)$$

- Nützlich ist folgende **heuristische Herleitung**: aus der Taylor-Formel

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

folgt

$$\frac{f(z)}{z - z_0} = \frac{f(z_0)}{z - z_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^{k-1}$$

**Formal** erhalten wir damit

$$\oint_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_c \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \oint_c \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^{k-1} dz}_{=0} = 2\pi i \cdot f(z_0)$$

# Ein Beispiel zur Cauchyschen Integralformel.

Zu berechnen sei das Integral

$$\oint_c \frac{1}{1+z^2} dz,$$



wobei  $c$  die Achterkurve bezeichnet, die den Punkt  $z_1 = i$  einmal im positiven Sinn, den Punkt  $z_2 = -i$  einmal im negativen Sinn umläuft.

- ① Berechnung mittels **Partialbruchzerlegung**  $\frac{1}{1+z^2} = \frac{i}{2} \frac{1}{z+i} - \frac{i}{2} \frac{1}{z-i}$

$$\begin{aligned} \oint_c \frac{1}{1+z^2} dz &= \oint_c \frac{1}{(z+i)(z-i)} dz = \frac{i}{2} \oint_c \left( \frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i} \right) dz \\ &= \frac{i}{2} \underbrace{\oint_c \frac{dz}{z+i}}_{-2\pi i} - \frac{i}{2} \underbrace{\oint_c \frac{dz}{z-i}}_{2\pi i} = \frac{i}{2}(-2\pi i) - \frac{i}{2}(2\pi i) = 2\pi \end{aligned}$$

- ② Berechnung mittels **Cauchyscher Integralformel**

$$\oint_c \frac{1}{1+z^2} dz = \oint_{c_1} \underbrace{\left( \frac{1}{z-i} \right)}_{\frac{1}{1+z^2}} dz + \oint_{c_2} \underbrace{\left( \frac{1}{z+i} \right)}_{\frac{1}{1+z^2}} dz = 2\pi$$

$\rightarrow 2\pi i \cdot \frac{1}{z+i} \Big|_{z=i} = \pi$   
 $\rightarrow 2\pi i \cdot \frac{1}{z+i} \Big|_{z=-i} = -\pi$

# Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel.

## Korollar 1: (Mittelwerteigenschaft)

Ist  $f(z)$  holomorph auf dem Gebiet  $G$ , so gilt für  $z_0 \in G$ ,  $\overline{K_r(z_0)} \subset G$  die Mittelwertformel

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$$

## Korollar 2: (Maximumprinzip)

$$|f(z_0)| \leq \max_{H_r} |f(z)| \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi$$

- 1) Ist  $f(z)$  holomorph auf  $G$  und besitzt  $|f(z)|$  sein Maximum in  $z_0 \in G$ , dann ist  $f(z)$  eine konstante Funktion.
- 2) Ist  $f(z)$  stetig auf  $\overline{G}$  und holomorph auf  $G$ , so nimmt  $|f(z)|$  sein Maximum stets auf dem Rand  $\partial G$  an.

## Korollar 3: (Fundamentalsatz der Algebra)

Ist  $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$  ein Polynom vom Grad  $n \geq 1$  und  $a_n \neq 0$ , so besitzt  $p(z)$  wenigstens eine Nullstelle in  $\mathbb{C}$ .

# Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra.

Wir nehmen an, dass das Polynom keine Nullstelle besitzt. Dann ist die Funktion  $f(z) := 1/p(z)$  holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$ . Nun gilt

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| \frac{1}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0} \right| \\ &= \frac{1}{|z|^n} \cdot \left| \frac{1}{a_n + a_{n-1} \frac{1}{z} + \dots + a_0 \frac{1}{z^n}} \right| \end{aligned}$$

*Handwritten note:  $\xrightarrow{z \rightarrow \infty} \frac{1}{|a_n|}$*

Im Grenzfall  $z \rightarrow \infty$  erhalten wir also  $|f(z)| \rightarrow 0$ .

Daher muss  $|f(z)|$  in einem Punkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  das Maximum annehmen und nach dem **Maximumprinzip** folgt  $f(z) = \text{const.}$

Demnach ist auch  $p(z) = \text{const.} =: \alpha$ , aber dann gilt

$$a_n z^n \left( 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{z} + \dots \right) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 = \alpha$$

*Handwritten notes:  $\xrightarrow{z \rightarrow \infty} \sim a_n z^n$ ,  $a_n \rightarrow 0$*

und wir erhalten durch Koeffizientenvergleich  $a_n = 0$ , also einen **Widerspruch**.

# Taylor-Entwicklung komplexer Funktionen.

**Satz:** Ist  $f(z)$  auf einem Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$  holomorph und  $z_0 \in G$ , so ist  $f(z)$  in jedem Kreis  $K_r(z_0) \subset G$  in eine **Potenzreihe** entwickelbar,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit } |z - z_0| < r.$$

Den Punkt  $z_0$  nennt man den **Entwicklungspunkt**.

Insbesondere ist  $f(z)$  auf  $G$  beliebig oft differenzierbar mit

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1}$$

$f''(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k (z - z_0)^{k-2}$

Die **Koeffizienten**  $a_k$  der Potenzreihe sind gegeben durch

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)$$

$z = z_0$

$$f'(z_0) = a_1$$
$$f''(z_0) = \frac{0!}{2}$$

Für den **Konvergenzradius**  $R$  der Taylor-Reihe gilt

$$R \geq \sup\{r > 0 : K_r(z_0) \subset G\}$$

# Verallgemeinerte Cauchysche Integralformel.

**Satz:** Analog zur Cauchyschen Integralformel

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

gilt für die **Ableitungen** von  $f(z)$  die Formel

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

**Beweis:** Nach der **Cauchyschen Integralformel** gilt

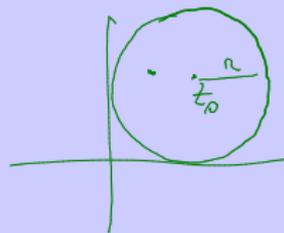
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0} d\zeta$$

wobei der Kreis  $|\zeta - z_0| = r$  **einmal** im positiven Sinn durchlaufen wird.

# Fortsetzung des Beweises.

Liegt nun  $z$  **innerhalb** dieses Kreises, d.h.  $|z - z_0| < r$ , so folgt ebenfalls <sup>Cauchy  
Majoranten</sup>

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$



Wir schreiben nun

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{\zeta - z_0}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} \end{aligned}$$

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k = \frac{1}{1 - \rho} \quad |\rho| < 1$$

Der letzte Ausdruck auf der rechten Seite ist der Grenzwert der **geometrischen Reihe**

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^k$$

## Fortsetzung des Beweises.

Wir erhalten damit

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k$$

Für den Integranden in obenstehendem Integral folgt

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \cdot (z - z_0)^k$$

und damit kann die Integralformel in der Form

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \cdot (z - z_0)^k d\zeta$$

geschrieben werden.

Da die Potenzreihe **gleichmäßig** konvergiert, kann man Summation und Integration **vertauschen**.

# Komplettierung des Beweises.

Wir erhalten damit

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right] (z - z_0)^k$$

*⊗ k*

und ein **Koeffizientenvergleich** in der Potenzreihe ergibt

$$\frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0) = a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$$

*vorheriger Satz*

und damit die verallgemeinerte Cauchysche Integralformel.

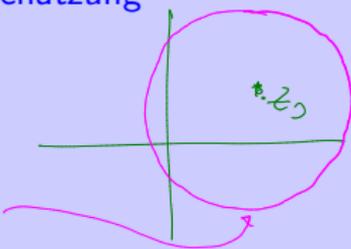
# Die Cauchysche Ungleichung.

**Satz:** Sei  $f(z)$  holomorph auf  $G$ ,  $z_0 \in G$ ,  $\overline{K_r(z_0)} \subset G$ . Für die Koeffizienten der Taylor-Entwicklung von  $f(z)$  um  $z_0$  gilt dann die **Abschätzung**

$$\left| \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \right| \leq \frac{M(r)}{r^n}$$

mit

$$M(r) = \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|$$



**Beweis:** Aus der **verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel**

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

folgt direkt

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \max_{|z-z_0|=r} \left( \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}} \right) \cdot 2\pi r \\ &= \frac{1}{r^n} \cdot M(r) \end{aligned}$$

# Der Satz von Liouville.

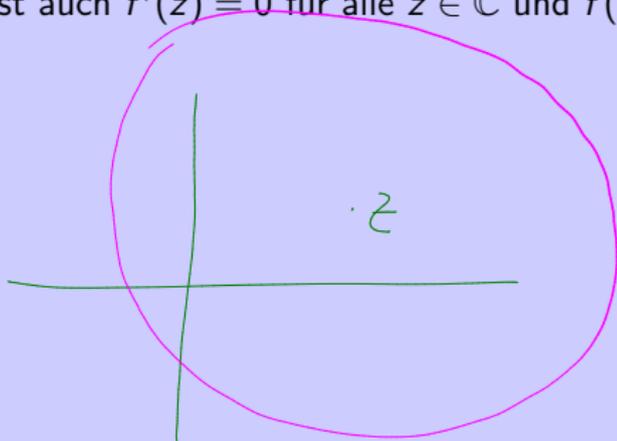
**Satz:** Ist  $f(z)$  holomorph und beschränkt auf  $\mathbb{C}$ , so ist  $f(z)$  konstant.

**Beweis:** Aus der Cauchyschen Ungleichung folgt im Grenzwert  $r \rightarrow \infty$

$$f^{(n)}(z) = 0 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}, n \geq 1$$

Damit ist auch  $f'(z) = 0$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  und  $f(z) = \text{const.}$

$$|f(z)| \leq C$$



$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n! C}{r^n} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$$

# Kapitel 5. Komplexe Integration

## 5.4 Singularitäten und Residuen

### Satz: (Laurent-Entwicklung)

Sei  $f(z)$  auf einem Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$  holomorph,  $z_0 \in \mathbb{C}$  und  $0 \leq R_1 < R_2$  mit

$$K_{R_1, R_2}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z - z_0| < R_2\} \subset G$$

Dann ist  $f(z)$  auf  $K_{R_1, R_2}(z_0)$  in eine **Laurent-Reihe** mit **Entwicklungspunkt**  $z_0$  entwickelbar,

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{für } R_1 < |z - z_0| < R_2.$$

Für die Koeffizienten gilt mit  $R_1 < \rho < R_2$

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$$

für  $k \in \mathbb{Z}$ .



$K_{0, R}(0)$

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

$$e_{-1} = 1 \\ e_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Cauchy HS

$f$  holomorph,  $\gamma$  einf. zh.,  $C$  geschlossene Kurve

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

$$\oint_C (z - z_0)^k dz = \begin{cases} 0 & k \neq -1 \\ 2\pi i & k = -1 \end{cases}$$

Cauchy Integral Formel

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0) \quad f \text{ holomorph}$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = 2\pi i n! f^{(n)}(z_0)$$

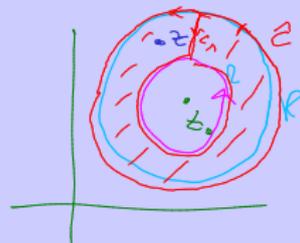
# Die Laurent-Entwicklung.

**Weiterhin gilt:** Die Reihe konvergiert innerhalb des größten Kreisringes  $K_{r,R}(z_0)$ , der noch innerhalb von  $G$  liegt, in jedem kleineren **kompakten** Kreisring  $K_{\rho_1,\rho_2}(z_0)$  ist die Konvergenz **absolut** und **gleichmäßig**.

**Beweis des Satzes:** Gegeben sei ein Kreisring  $K_{r,R}(z_0) \subset G$  mit  $R_1 < r < R < R_2$  und den beiden Rändern

$$c_r(t) := z_0 + re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$c_R(t) := z_0 + Re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$



**Behauptung:** Nach dem Cauchyschen Integralsatzes gilt für einen Punkt  $z \in K_{r,R}(z_0)$  die Beziehung

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$f(z) = \int_{c_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{c_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

## Fortsetzung des Beweises.

Seien dazu die beiden Kurven  $c_1$  und  $c_2$  definiert wie an der [Tafel](#) angegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned} \oint_{c_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \oint_{c_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \oint_{c_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \oint_{c_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= 2\pi i \cdot f(z) + 0 \end{aligned}$$

Wir versuchen nun, für die beiden Kurvenintegrale entlang  $c_R$  und  $c_r$  eine [Reihendarstellung](#) herzuleiten.

Sei zunächst  $\zeta$  ein Punkt auf  $c_R$ , also  $|\zeta - z_0| > |z - z_0|$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{\zeta - z_0}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^k \end{aligned}$$

*Handwritten notes:* auf  $c_R$   $\left|\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right| > 1$   
 $\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| < 1$  geom. Reihe



## Fortsetzung des Beweises.

Setzt man diese Formel in das Kurvenintegral ein, so folgt direkt

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{CR} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{CR} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta}_{\text{OK}} \right] (z - z_0)^k$$

Sei nun  $\zeta$  ein Punkt auf  $C_r$ , d.h.  $|\zeta - z_0| < |z - z_0|$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{z - z_0}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} && \left| \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right| < 1 \\ &= -\frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)} = -\frac{1}{z - z_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)^k \\ &= -\sum_{m=-\infty}^{-1} \frac{(z - z_0)^m}{(\zeta - z_0)^{m+1}} \quad \text{mit } m = -(k + 1) \end{aligned}$$

## Fortsetzung des Beweises.

Einsetzen in das Kurvenintegral über  $c_r$  ergibt demnach

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{c_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = - \sum_{k=-\infty}^{-1} \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right] (z - z_0)^k$$

Addiert man nun beide Reihendarstellungen, so folgt

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad r \leq |z - z_0| \leq R$$

wobei die Koeffizienten durch

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta & : k = 0, 1, 2, \dots \\ \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta & : k = -1, -2, -3, \dots \end{cases}$$

gegeben sind.

# Komplettierung des Beweises.

Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt dann auch

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \quad (k \in \mathbb{Z})$$

für ein beliebiges  $\rho \in [r, R]$ .

## Bemerkung:

- Die Laurent-Entwicklung von  $f(z)$  ist bei vorgegebenem Kreisring **eindeutig** bestimmt.
- Ist  $f(z)$  holomorph im gesamten Kreis  $\overline{K_{R_2}(z_0)}$ , so gilt aufgrund des Cauchyschen Integralsatzes für  $k = -1, -2, -3, \dots$  die Beziehung

$$a_k = 0$$

und die **Laurent-Entwicklung** stimmt dann mit der **Taylor-Entwicklung** überein.

# Beispiel.

Wir betrachten die Funktion

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$$

mit **Entwicklungspunkt**  $z_0 = 0$  und **Kreisring**  $0 < |z| < \infty$ .

Mit der Taylor-Entwicklung

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \dots$$

erhalten wir die **Laurent-Reihe**

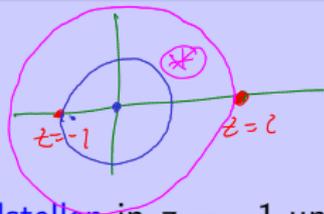
$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k-1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \dots$$

$$a_k = 0 \quad k < -1 \quad a_{-1} = 1 \quad a_1 = -\frac{1}{3!} \quad a_0 = 0$$

# Beispiel.

Wir betrachten die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)}$$



mit Entwicklungspunkt  $z_0 = 0$ . Der Nenner hat **zwei Nullstellen** in  $z = -1$  und  $z = 2$ . Es existieren daher **drei Laurent-Entwicklungen**, nämlich in  $|z| < 1$ , in  $1 < |z| < 2$ , und in  $|z| > 2$ .

Für den Kreisring  $1 < |z| < 2$  gilt etwa:

$$\frac{1}{(z+1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z+1}$$

$|z| < 1$   $|z| > 2$

$$f(z) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z-2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z+1} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-z/2} - \frac{1}{3z} \cdot \frac{1}{1+1/z}$$

$$= \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k - \frac{1}{3z} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{z}\right)^k$$

$|z/2| < 1$   $|z| < 2$

$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{3} z^{-(k+1)}$

$$= \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^k}{3} \cdot z^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{3 \cdot 2^{k+1}}\right) \cdot z^k$$

$k \in \mathbb{Z}$   
 $\{0, \dots\}$   $\mathbb{R} = \{-1, -2, \dots\}$

$$|z| < 1$$

$$K_1(0)$$

$$f(z) = \frac{1}{3} \frac{1}{z-2} - \frac{1}{3} \frac{1}{z+1} =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{3} \frac{1}{1+z} =$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k - \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} (-z)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{3} \frac{z^{k+1}}{2^k} + \frac{1}{3} \right) z^k \quad \text{Taylor.}$$

$$|z| > 2$$

$$K_{2,\infty}(0)$$

$$f(z) = \frac{1}{3} \frac{1}{z-2} - \frac{1}{3} \frac{1}{z+1} =$$

$$= \frac{1}{3z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} - \frac{1}{3z} \frac{1}{1+\frac{1}{z}} =$$

$$|z| > 2$$

$$\downarrow$$
$$\left|\frac{2}{z}\right| < 1$$

$$= \frac{1}{3z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^k - \frac{1}{3z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3} \left( \frac{2^k}{z} - \frac{1}{z} \right) \frac{1}{z^{k+1}}$$

# Isolierte Singularitäten.

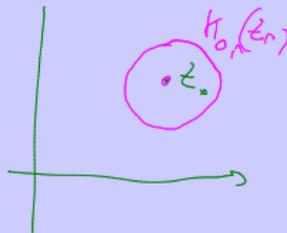
**Definition:** Sei  $f(z)$  holomorph auf einem Gebiet  $G$ . Ein Punkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  heißt **isolierte Singularität** von  $f(z)$ , falls ein  $r > 0$  existiert mit  $K_{0,r}(z_0) \subset G$ .

Ist  $f(z) = \sum a_k(z - z_0)^k$  die Laurent-Entwicklung in  $K_{0,r}(z_0)$ , so nennt man den Punkt  $z_0$

- 1) eine **hebbare Singularität**, falls  $a_k = 0$  für alle  $k < 0$  gilt,
- 2) einen **Pol der Ordnung  $m \in \mathbb{N}$** , falls gilt

$$a_{-m} \neq 0 \quad \wedge \quad \forall k < -m : a_k = 0$$

- 3) eine **wesentliche Singularität**, falls  $a_k \neq 0$  für unendlich viele  $k < 0$  gilt.



# Einige Beispiele.

- ❶ Der Punkt  $z_0 = 0$  ist eine hebbare Singularität der Funktion

$$f(z) = \frac{\sin z}{z},$$

denn die Taylor-Entwicklung lautet

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

- ❷ Die Funktion

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} +$$

hat in  $z_0 = 0$  einen Pol der Ordnung 1.

- ❸ Die Funktion  $f(z) = e^{1/z}$  hat in  $z_0 = 0$  eine wesentliche Singularität, denn es gilt

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{1!} \left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{z}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{z}\right)^3 + \dots$$

# Ein weiteres Beispiel: Rationale Funktionen.

Rationale Funktionen haben **keine** wesentlichen Singularitäten: sei

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

eine rationale Funktion. Die Singularitäten sind die Nullstellen von  $q(x)$ . Ist nun  $z_0$  eine  $m$ -fache Nullstelle von  $q(z)$ , so gilt

$$q(z) = (z - z_0)^m r(z), r(z_0) \neq 0 \quad \rightarrow \quad f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \cdot g(z),$$

wobei  $g$  holomorph in  $z_0$  ist. Daraus folgt

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

d.h.  $z_0$  ist ein **Pol** der Ordnung  $\leq m$  oder eine **hebbare Singularität**, falls  $a_0 = a_1 = \dots a_{m-1} = 0$ .

# Klassifikation von Singularitäten.

## Satz:

- a) Ist  $z_0$  eine **hebbare** Singularität, so existiert der Grenzwert  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ . Die Funktion

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & : z \neq z_0 \\ \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) & : z = z_0 \end{cases}$$

ist eine **holomorphe Fortsetzung** von  $f(z)$ .

- b) Ist  $f(z)$  in einer Umgebung von  $z_0$  **beschränkt**, so ist  $z_0$  eine hebbare Singularität.
- c) Ist  $z_0$  ein **Pol** von  $f(z)$ , so gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$$

- d) Ist  $z_0$  eine **wesentliche** Singularität von  $f(z)$ , so bildet  $f(z)$  jeden Kreisring  $K_{0,\varepsilon}(z_0)$  auf  $\mathbb{C}$  oder  $\mathbb{C} \setminus \{a\}$  ab.

# Kapitel 5. Komplexe Integration

## 5.5 Komplexe Partialbruchzerlegung, Residuensatz

**Definition:** Besitzt die Funktion  $f(z)$  bei  $z_0$  die Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit } 0 < |z - z_0| < r,$$

so nennt man

$$h(z; z_0) := \sum_{-\infty}^{-1} a_k (z - z_0)^k$$

den **Hauptteil** von  $f(z)$  zum Entwicklungspunkt  $z_0$ .

**Satz:** Ist  $r(z) = p(z)/q(z)$  eine rationale Funktion, wobei der Grad des Zählers echt kleiner als der Grad des Nenners ist, und sind  $z_1, \dots, z_m$  die (verschiedenen) Nullstellen von  $q(z)$ , so gilt

$$\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{a}{z-z_1} + \frac{b}{z-z_2} = h(z, z_1) + h(z, z_2)$$

$$\frac{1}{z-z_0} = h(z, z_0)$$

$$r(z) = h(z; z_1) + \dots + h(z; z_m)$$

# Beweis des letzten Satzes.

**Idee:** Wir zeigen, dass die Funktion  $g(z)$  definiert durch

$$g(z) := r(z) - \sum_{j=1}^m h(z; z_j)$$

z.z.  $f(z) = 0$   
 $r(z) - \sum_{j=1}^m h(z; z_j) = 0$

beschränkt und auf ganz  $\mathbb{C}$  holomorph ist. Nach dem Satz von Liouville folgt dann, dass  $g(z)$  konstant ist. Mit  $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = 0$ , folgt dann die Behauptung.

Offensichtlich ist  $g(z)$  holomorph auf dem Definitionsbereich  $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$  und die Hauptteile der Laurent-Entwicklungen zu den Entwicklungspunkten  $z_1, \dots, z_m$  verschwinden identisch.

Demnach sind die Punkte  $z_1, \dots, z_m$  hebbare Singularitäten und  $g(z)$  ist holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$ . Wegen  $\text{grad } p < \text{grad } q$  folgt

$$\lim_{z \rightarrow \infty} r(z) = 0$$

und damit auch

$$\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = 0$$

## Fortsetzung des Beweises.

Also ist  $g(z)$  beschränkt und holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$ . Nach dem Satz von Liouville folgt

$$g(z) = \text{const}$$

und aufgrund des Grenzverhaltens für  $z \rightarrow \infty$  folgt

$$g(z) = 0$$

**Anwendung des Satzes:** Die [Partialbruchzerlegung](#) einer komplexen rationalen Funktion kann über die [Hauptteile](#) der Laurent-Entwicklungen berechnet werden, wobei die Entwicklungspunkte gerade die [Singularitäten](#) der rationalen Funktion sind.

# Ein Beispiel zur Partialbruchzerlegung.

Man bestimme die **Partialbruchzerlegung** der Funktion

$$f(z) = \frac{4}{(z+1)^2(z-1)} = \frac{a}{z+1} - \frac{b}{(z+1)^2} - \frac{c}{z-1}$$

Der Nenner besitzt die beiden **Nullstellen**  $z = -1$  und  $z = 1$ . Wir bestimmen daher die **Hauptteile** der Laurent-Entwicklungen um gerade diese beiden Punkte.

1) Für  $z = -1$  schreibt man

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)^2} \cdot \underbrace{\frac{4}{z-1}}_{g(z)} = \frac{1}{(z+1)^2} \cdot \frac{4}{z+1-2} = \frac{1}{(z+1)^2} \cdot \frac{-4}{1-\frac{z+1}{2}} = \frac{-4}{(z+1)^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z+1}{2}}$$

Nun ist  $g(z)$  in einer Umgebung des Punktes  $z = -1$  **holomorph** und kann in eine **Taylor-Reihe** entwickelt werden. Es gilt daher

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)^2} \cdot (-2 - (z+1) + O((z+1)^2)) = \frac{-2}{(z+1)^2} - \frac{1}{(z+1)}$$

# Fortsetzung des Beispiels.

und wir erhalten damit

$$f(z) = \underbrace{-\frac{2}{(z+1)^2} - \frac{1}{z+1}}_{h(z; -1)} + \dots$$

$$\frac{1}{z-1} \cdot \left(1 + 2 \frac{z-1}{z} + \dots\right) =$$

2) Analog schreiben wir für den Punkt  $z = 1$

$$f(z) = \frac{1}{z-1} \cdot \underbrace{\frac{4}{(z+1)^2}}_{g(z)} = \frac{1}{z-1} \left(\frac{2}{z-1+2}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{z-1} \cdot \frac{4}{4} \frac{1}{\left(1 + \frac{z-1}{2}\right)^2} =$$

und erhalten durch **Taylor-Entwicklung**

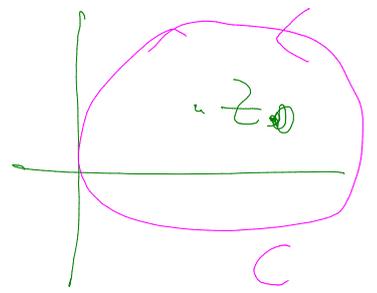
$$f(z) = \frac{1}{z-1} \cdot \left(1 - (z-1) + O((z-1)^2)\right) = \underbrace{\frac{1}{z-1}}_{h(z; -1)} - 1 + \dots$$

Demnach ist die **komplexe Partialbruchzerlegung** von  $f(z)$  gegeben durch

$$f(z) = \underbrace{-\frac{2}{(z+1)^2} - \frac{1}{z+1}}_{h(z, -1)} + \underbrace{\frac{1}{z-1}}_{h(z, 1)}$$

falls

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$$



$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \underbrace{\oint_C (z-z_0)^k dz}_{= 2\pi i \text{ if } k=-1} \\ &= 2\pi i a_{-1} \end{aligned}$$

# Der Residuensatz.

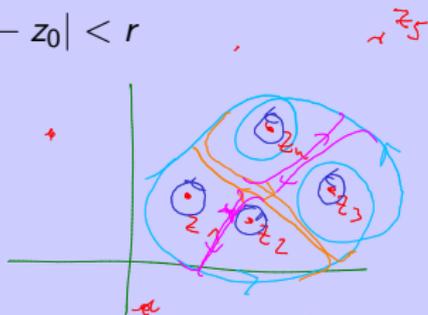
**Definition:** Ist  $z_0$  eine isolierte Singularität von  $f(z)$ , so besitzt  $f(z)$  eine Laurent-Entwicklung zum Punkt  $z_0$ , d.h.

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit } 0 < |z - z_0| < r$$

Man nennt dann

$$\text{Res}(f; z_0) := a_{-1}$$

das **Residuum** von  $f(z)$  in  $z_0$ .



**Satz:** Sei  $G$  ein Gebiet,  $f : G \setminus \{z_1, \dots, z_m\} \rightarrow \mathbb{C}$  sei holomorph,  $c$  eine geschlossene, stückweise  $C^1$ -Kurve in  $G \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$ , die in  $G$  nullhomotop ist, d.h. innerhalb von  $c$  liegen höchstens die isolierten Singularitäten  $z_1, \dots, z_m$ .

Dann gilt

$$\oint_c f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{Uml}(c; z_k) \cdot \text{Res}(f; z_k)$$

# Beweisskizze zum Residuensatz.

- 1) Zunächst genügt es, nur die Singularitäten zu betrachten, die **innerhalb** von  $c$  liegen, da sonst die Umlaufzahl Null ist.
- 2) Man zerlegt  $c$  in geschlossene Kurven  $c_1, \dots, c_s$ , sodass jede dieser Kurven  $c_j$  nur **Singularitäten mit gleicher Umlaufzahl**  $l_j$  enthält.
- 3) Jede Kurve  $c_j$  ist innerhalb von  $G \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$  homotop zu einer  **$l_j$ -fach durchlaufenen einfach geschlossenen Kurve**  $\tilde{c}_j$ . Daraus folgt

$$\oint_c f(z) dz = \sum_{j=1}^s \oint_{c_j} f(z) dz = \sum_{j=1}^s l_j \cdot \oint_{\tilde{c}_j} f(z) dz$$

- 4) Jeder **einfach geschlossene Weg**  $\tilde{c}_j$  kann in eine Summe von Kreisen um die Singularitäten innerhalb von  $\tilde{c}_j$  zerlegt werden. Daraus folgt

$$\oint_c f(z) dz = \sum_{k=1}^m \text{Uml}(c; z_k) \oint_{|z-z_k|=\rho_k} f(z) dz$$

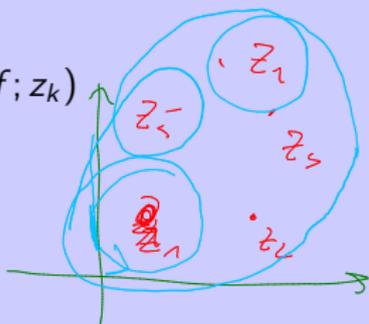
# Fortsetzung der Beweisskizze zum Residuensatz.

Mit der **Laurent-Entwicklung** um  $z_k$  gilt aber

$$\begin{aligned}\oint_{|z-z_k|=\rho_k} f(z) dz &= \oint_{|z-z_k|=\rho_k} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j (z-z_k)^j dz \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \cdot \oint_{|z-z_k|=\rho_k} (z-z_k)^j dz \\ &= 2\pi i \cdot a_{-1} = 2\pi i \cdot \text{Res}(f; z_k)\end{aligned}$$

Für die Kurve an der **Tafel** erhält man also

$$\begin{aligned}\oint_c f(z) dz &= 2\pi i \cdot [2\text{Res}(f; z_1) + \text{Res}(f; z_2) \\ &\quad + \text{Res}(f; z_3) + 2\text{Res}(f; z_4) + 2\text{Res}(f; z_5)]\end{aligned}$$



# Methoden zur Berechnung von Residuen.

## Satz:

- a) Ist  $z_0$  ein **einfacher Pol** von  $f(z)$ , so besitzt  $f(z)$  eine Darstellung der Form

$$f(z) = \frac{g(z)}{z - z_0}$$

mit einer in  $z_0$  holomorphen Funktion  $g(z)$ . Für das Residuum gilt dann

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = g(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z)$$

- b) Ist  $f(z) = p(z)/q(z)$  mit auch in  $z_0$  holomorphen Funktionen  $p$  und  $q$  eine rationale Funktion und  $z_0$  eine **einfache Nullstelle** von  $q(z)$ , so gilt

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

- c) Gilt  $f(z) = g(z)/(z - z_0)^m$ ,  $m \geq 1$  mit einer in einer Umgebung von  $z_0$  holomorphen Funktion  $g(z)$ , so gilt

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

# Beweis des letzten Satzes.

Wie man leicht sieht, ist Teil a) ein **Spezialfall** von Teil c).

Weiterhin kann Teil c) über eine **Taylor-Entwicklung** bewiesen werden, da  $g(z)$  in einer Umgebung von  $z_0$  holomorph ist.

Wir schreiben zunächst

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^{k-m}$$

*Lorentzreihe*  
 $Q \rightarrow k = m-1$

Daraus kann man direkt das **Residuum** ablesen und es gilt

$$a_{-1} = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} = \text{Res}(f; z_0)$$

Für Teil b) definieren wir

$$q(z) =: (z - z_0)r(z)$$

Dann ist  $r(z)$  im Punkt  $z_0$  **holomorph fortsetzbar** mit  $r(z_0) \neq 0$ .

# Fortsetzung des Beweises.

Für Teil b) definieren wir

$$q(z) := (z - z_0)r(z)$$

Dann ist  $r(z)$  im Punkt  $z_0$  holomorph fortsetzbar mit  $r(z_0) \neq 0$ .

Damit ist die Funktion

$$f(z) = \frac{g(z)}{z - z_0}$$

$$g(z) = \frac{p(z)}{r(z)}$$

$$\text{res}(f; z_0) = \frac{p(z_0)}{r(z_0)}$$

bei  $z = z_0$  holomorph und wir erhalten für  $f(z)$  die Darstellung

$$f(z) = \frac{g(z)}{z - z_0}$$

Nach Teil a) folgt wegen

$$q'(z) = r(z) + (z - z_0)r'(z)$$

$$g'(z_0) = p'(z_0)$$

gerade

$$\text{Res}(f; z_0) = g(z_0) = \frac{p(z_0)}{r(z_0)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

# Drei Beispiele zur Berechnung von Residuen.

**Beispiel 1:** Für die Funktion

$$z_1 = -1 \quad z_2 = 2$$

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)}$$

hat man nach Teil a) des letzten Satzes

$$z_1 = -1 \quad f(z) = \frac{1}{z+1} \cdot \underbrace{\left( \frac{1}{z-2} \right)}_{g(z)} \quad \text{Res}(f; -1) = \frac{1}{z-2} \Big|_{z=-1} = -\frac{1}{3}$$

$$z_2 = 2 \quad f(z) = \frac{1}{z-2} \cdot \underbrace{\left( \frac{1}{z+1} \right)}_{g(z)} \quad \text{Res}(f; 2) = \frac{1}{z+1} \Big|_{z=2} = \frac{1}{3}$$

**Beispiel 2:** Für

$$z_1 = i \quad z_2 = -i$$

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{p(z)}{g(z)} \quad g'(z) = 2z$$

gilt nach b)

$$\text{Res}(f; i) = \frac{1}{2z} \Big|_{z=i} = \frac{1}{2i} \quad \text{und} \quad \text{Res}(f; -i) = \frac{1}{2z} \Big|_{z=-i} = -\frac{1}{2i}$$

*Handwritten notes:*  $p(z) = p(i) = 1$  (with arrow pointing to the numerator),  $\frac{1}{(z+i)(z-i)}$  (with arrow pointing to the denominator)

# Drei Beispiele zur Berechnung von Residuen.

**Beispiel 3:** Die Funktion

$$z_0 = i \quad z_1 = -i \quad z_2 = 0$$

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2 + 1)^2} =$$

hat bei  $z_0 = i$  einen **Pol zweiter Ordnung**. Nach dem letzten Satz, Teil c), gilt

$$\text{Res}(f; i) = g'(i) = -\frac{3}{4e}$$

wobei die Funktion  $g(z)$  aufgrund der Darstellung

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z+i)^2(z-i)^2} = \frac{1}{(z-i)^2} \underbrace{\frac{e^{iz}}{z(z+i)^2}}$$

durch

$$g'(z) = \frac{ie^{iz}}{z(z+i)^2} - \frac{e^{iz}}{z^2(z+i)^2} \cdot ((z+i)^2 + 2z(z+i)) = g(z) = \frac{e^{iz}}{z(z+i)^2}$$

gegeben ist.  $= \frac{e^{iz}}{z(z+i)^2} \left( i - \frac{3z+i}{z(z+i)} \right)$   $g'(i) = \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{i(-4)} \left( i - \frac{3i}{2i} \right) = \boxed{-\frac{3}{4e}}$

# Kapitel 5. Komplexe Integration

## 5.6 Berechnung reeller Integrale mittels Residuensatz

**Satz:** Sei  $r(x) = p(x)/q(x)$  eine rationale Funktion, die keine Singularitäten auf  $\mathbb{R}$  besitzt, und es gelte

$$\text{grad}(q) \geq \text{grad}(p) + 2$$

Dann folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} r(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } z > 0} \text{Res}(r; z)$$

**Beweis:** Wegen  $\text{grad}(q) \geq \text{grad}(p) + 2$  existiert nach dem **Majorantenkriterium** das oben stehende uneigentliche Integrale, denn für  $x \gg 1$  gilt

$$\left| \frac{p(x)}{q(x)} \right| \leq \frac{c}{x^2}$$

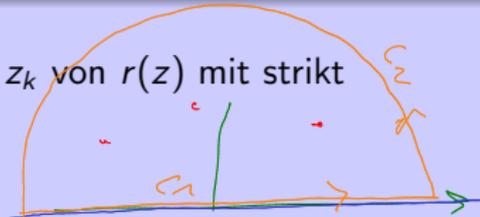
*1/x<sup>2</sup> indy. bis +∞*

Wir approximieren jetzt das uneigentliche reelle Integral durch ein komplexes Integral entlang einer Kurve (siehe Tafel).

## Fortsetzung des Beweises.

Ist  $r$  hinreichend groß, so liegen alle Singularitäten  $z_k$  von  $r(z)$  mit strikt positivem Imaginärteil **innerhalb** der Kurve  $c_1 + c_2$ .

Daraus folgt

$$2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}(r; z_k) = \oint_{c_1 + c_2} r(z) dz = \int_{c_1} r(z) dz + \int_{c_2} r(z) dz$$


Nun gilt

$$\int_{c_1} r(z) dz = \int_{-r}^r r(z) dz \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} r(z) dz \quad \text{für } r \rightarrow \infty$$

Weiter berechnet man

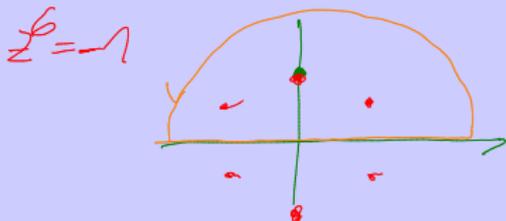
$$\left| \int_{c_2} r(z) dz \right| \leq \underbrace{\max_{|z|=r} |r(z)|}_{\substack{\leq \\ = r}} \cdot \underbrace{\pi r}_{\substack{\text{Länge Halbkreis}}} \leq \pi r \frac{C}{r^2} \longrightarrow 0 \quad \text{für } r \rightarrow \infty$$

Daraus folgt direkt die Behauptung.

# Beispiel.

Wir untersuchen das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6}$$



Die Funktion  $r(z) = 1/(1+z^6)$  besitzt sechs **Polstellen**, von denen drei in der **oberen Halbebene** liegen, nämlich  $e^{i\frac{\pi}{6}}$ ,  $e^{i\frac{\pi}{2}}$ ,  $e^{i\frac{5\pi}{6}}$ . Ferner gilt

$$\text{Res}(r; z_k) = \left. \frac{1}{6z^5} \right|_{z=z_k} = -\frac{z_k}{6}$$

Damit folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6} = 2\pi i \left( -\frac{1}{6}e^{i\frac{\pi}{6}} - \frac{1}{6}e^{i\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{6}e^{i\frac{5\pi}{6}} \right) = 2\pi i \cdot \frac{1}{6} \left( \sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= \frac{\pi}{3} \left( \sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{3} \left( 2 \sin \frac{\pi}{6} + 1 \right)$$

# Beispiel.

Wir untersuchen das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{x^2 + a^2} dx$$

mit  $a > 0, \omega > 0$

$$z_1 = i a \\ z_2 = -i a$$



Der letzte Satz läßt sich nicht direkt anwenden, aber wegen

$$\left| \frac{e^{i\omega z}}{z^2 + a^2} \right| = \frac{e^{-\omega y}}{|z^2 + a^2|} \stackrel{\omega > 0}{\leq} \frac{1}{|z^2 + a^2|} \leq \frac{c}{|z|^2} \quad \text{für } y \geq 0$$

entlang des Weges  $C_2$ , gilt die Aussage analog.

Wir erhalten also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{x^2 + a^2} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{Res} \left( \frac{e^{i\omega z}}{z^2 + a^2}; z_k \right) = 2\pi i \text{Res} \left( \frac{e^{i\omega z}}{z^2 + a^2}; ia \right)$$

$$= 2\pi i \left. \frac{e^{i\omega z}}{2z} \right|_{z=ia} = \frac{\pi}{a} e^{-\omega a}$$

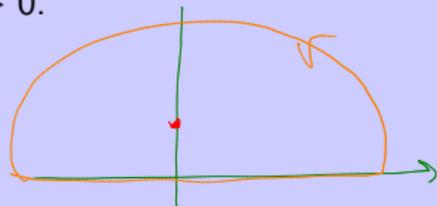
$$\Rightarrow \int_{C_2} \frac{e^{i\omega z}}{z^2 + a^2} dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

# Weitere Anwendungen.

**Satz:** Sei  $f(z)$  holomorph auf  $\{z : \operatorname{Im} z > -\varepsilon\}$ ,  $\varepsilon > 0$ , mit Ausnahme endlich vieler Singularitäten in der oberen Halbebene  $\operatorname{Im} z > 0$ .

Gilt

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty, y \geq 0} f(z) = 0,$$



so folgt

$$\text{CHW} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}(f(z)e^{iz}; z_k)$$

**Beispiel:** Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x-i)(x+i)}$$

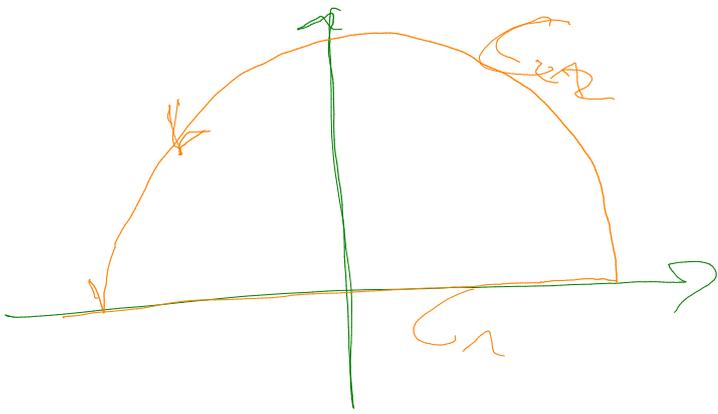
$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{ix}}{1+x^2}; i\right) =$$

$$\left. \frac{e^{ix}}{x+i} \right|_{x=i} = \frac{1}{2ie}$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx = 0$$

$$\text{CHW} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n f(x) dx$$



$$\int_{C_n} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

Si

$$\left| \int_{C_2} f(z) e^{iz} dz \right| = \left| \int_0^{\pi} f(re^{i\varphi}) e^{ire^{i\varphi}} r i e^{i\varphi} d\varphi \right| \leq$$

$$z = re^{i\varphi}$$

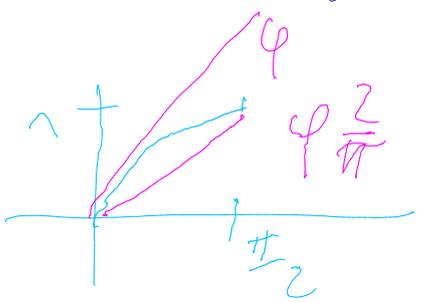
$$dz = r i e^{i\varphi} d\varphi$$

$$M(r) = \max \{ |f(z)| \mid z = r \}$$

$$e^{ire^{i\varphi}} = e^{ir(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = e^{ir\cos\varphi} e^{-r\sin\varphi}$$

$$\leq M(r) r \int_0^{\pi/2} e^{-r\sin\varphi} r d\varphi \leq 2M(r) r \int_0^{\pi/2} e^{-2\varphi^2/\pi} d\varphi =$$

$$= 2M(r) r \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \underbrace{\left(1 - e^{-2}\right)}_{\leq 1} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} M(r) \rightarrow 0 \quad r \rightarrow \infty$$



# Weitere Anwendungen.

**Satz:** Sei  $r(z)$  eine rationale Funktion ohne Polstellen in  $0 \leq x < \infty$  und es gelte  $\text{grad } q > \text{grad } p$ . Für  $0 < \alpha < 1$  gilt dann

$$\int_0^{\infty} \frac{r(x)}{x^\alpha} dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi\alpha i}} \sum_{z_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}} \text{Res} \left( \frac{r(z)}{z^\alpha}; z_k \right)$$

Dabei ist folgender Zweig von  $z^\alpha$  zu wählen

$$z = re^{i\phi} \quad \text{mit } 0 < \phi < 2\pi \quad \Rightarrow \quad z^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha\phi}$$

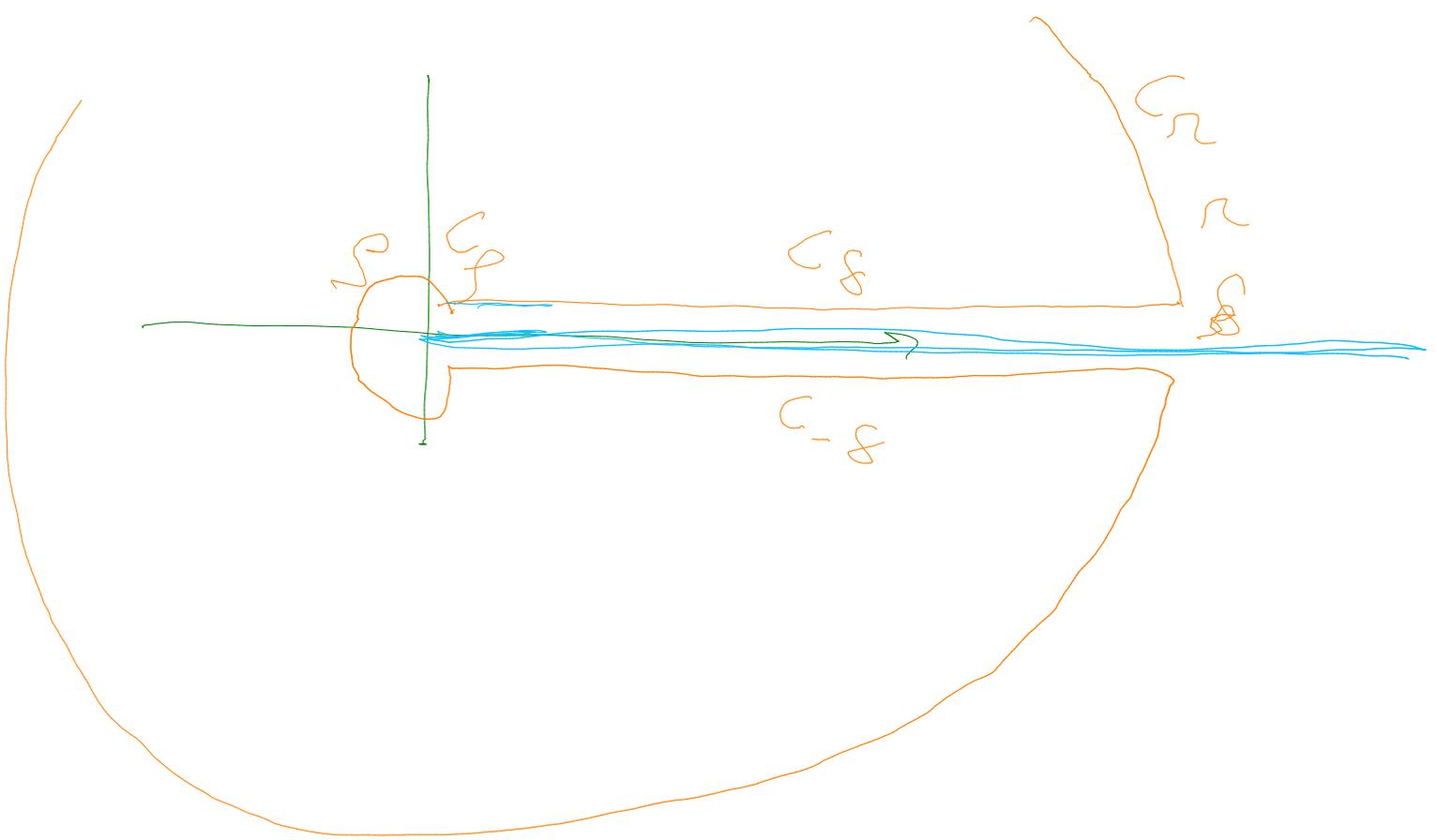
**Beispiel:** Man berechnet

$$r(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^\alpha(1+x)} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$$

$\text{Res} \left( \frac{r(z)}{z^\alpha} \right)_{z=-1} = \frac{1}{z^\alpha} \Big|_{z=-1} = e^{-i\pi\alpha}$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^\alpha(1+x)} dx = 2\pi i \frac{1}{1 - e^{-2\pi i \alpha}} \cdot \frac{1}{e^{i\pi\alpha}} = \pi \frac{2i}{e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$$



$$\int_C \frac{f(z)}{z^\alpha} dz = \int_{C_\delta} + \int_{C_{-\delta}} + \int_{C_n} + \int_{C_\delta}$$

$$\delta \rightarrow 0, r \rightarrow \infty, \rho \rightarrow 0$$

$$\int_{C_\delta} \frac{r(z+i\delta)}{(z+i\delta)^\alpha} z^\alpha dz \rightarrow \int_\delta^r \frac{r(z)}{z^\alpha} dz$$

$$\int_{C_{-\delta}} \frac{r(z-i\delta)}{(z-i\delta)^\alpha} z^\alpha dz \rightarrow -\frac{1}{e^{2\pi i \alpha}} \int_\delta^r \frac{r(z)}{z^\alpha} dz$$



$$\int_{C_r} \frac{|z|}{z^\alpha} = \quad z = re^{i\varphi} \quad dz = ire^{i\varphi} d\varphi$$

$$\left| \int_{C_r} f(z) dz \right| = \left| \int f(re^{i\varphi}) ire^{i\varphi} d\varphi \right|$$

$\leq \max_{|z|=r} |f(z)|$

$$\leq r M(r) = 2\pi$$

$$f(z) = \frac{|z|}{z^\alpha} \quad \frac{r(\delta)}{\delta^\alpha} \delta = \delta^{1-\alpha} r(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$$

$$\frac{r(R)}{R^\alpha} R = R^{1-\alpha} r(R) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

$$\int_{C_2} \rightarrow 0$$

$$\int_{C_\delta} \rightarrow 0$$

$$2\pi i \sum_{z \neq 0} \text{Res} \left( \frac{|z|}{z^\alpha}, z \right)$$

$\delta \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$

$$\int_{C_\delta} + \int_{C_R} = (1 - e^{-2\pi i \alpha}) \int_{\delta}^R \frac{|x|}{x^\alpha} dx = - \int_{\delta}^R - \int_{C_2} + \int_C$$

Satz 2:  $R$  rationale Fkt in  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$   
 keine Singularitäten auf  $x^2 + y^2 = 1$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t) dt =$$

$$2\pi \sum_{|z| < 1} \operatorname{Res} \left( \frac{1}{z} R \left( \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}, \frac{z + \frac{1}{z}}{2} \right); z \right)$$

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z} \operatorname{Res} \left( \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}, \frac{z + \frac{1}{z}}{2} \right) dz = \begin{matrix} z = re^{i\varphi} \\ dz = ire^{i\varphi} d\varphi \end{matrix}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{ire^{i\varphi}} R(\sin \varphi, \cos \varphi) ire^{i\varphi} d\varphi$$

$$\frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = \sin \varphi$$

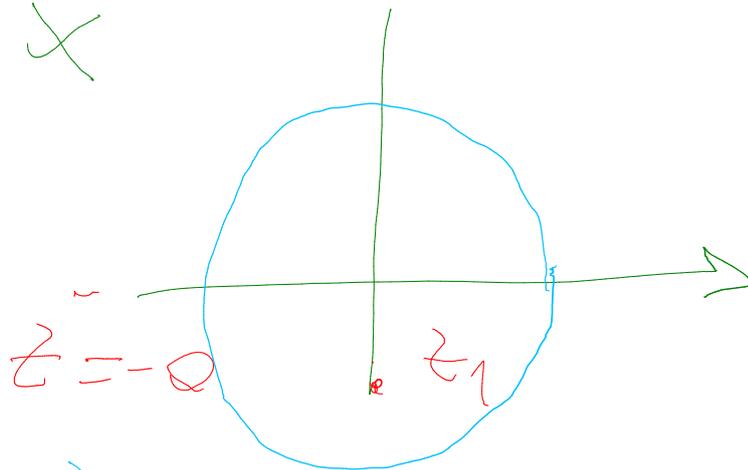
$$= \int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t) dt$$

Bsp  $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \sin t}$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t}$$

$$a > 1$$

$$R(x, y) = \frac{1}{a + x}$$



$$\text{Res} \left( \frac{1}{z} R \left( \frac{z + \frac{1}{z}}{2i} \right), z_2 \right)$$

$$\frac{1}{z} \frac{1}{a + \left( \frac{z + \frac{1}{z}}{2i} \right) \cdot \frac{1}{2i}} = \frac{z_1}{z^2 + 2i a z - 1}$$

$$z_{1/2} = -i a \pm \sqrt{a^2 - 1}$$

$$(*) = \frac{z_1}{z_2 - z_1} = \frac{z_1}{2i \sqrt{a^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

# Kapitel 6. Die Fourier–Transformation

## Wiederholung aus Analysis II: Fourier–Reihenentwicklung

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine  $T$ -periodische, stückweise stetige Funktion.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \right)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \cos(k\omega\tau) d\tau$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \sin(k\omega\tau) d\tau$$

Reelle Darstellung der Fourier–Entwicklung von  $f$  mit  $\omega = 2\pi/T$ .

# Konvergenzsatz zur Fourier-Entwicklung.

**Satz:** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $T$ -periodisch, stückweise stetig differenzierbar und betrachte die zugehörige Fourier-Reihe

$$F_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$$

Dann gilt:

- a) Die Reihe konvergiert punktweise und für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt

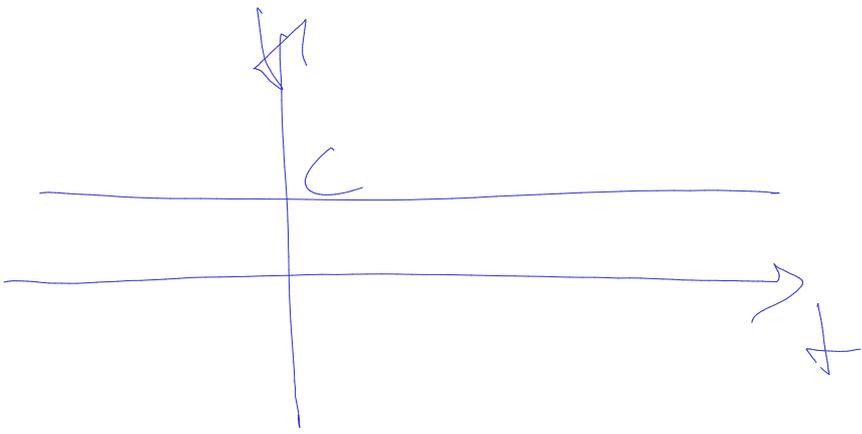
$$F_f(t) = \frac{1}{2} (f(t^+) + f(t^-))$$

*falls stetig*  
 $F_f(t) = f(t)$

- b) In allen kompakten Intervallen  $[a, b]$ , in denen  $f(t)$  stetig ist, ist die Konvergenz gleichmäßig.

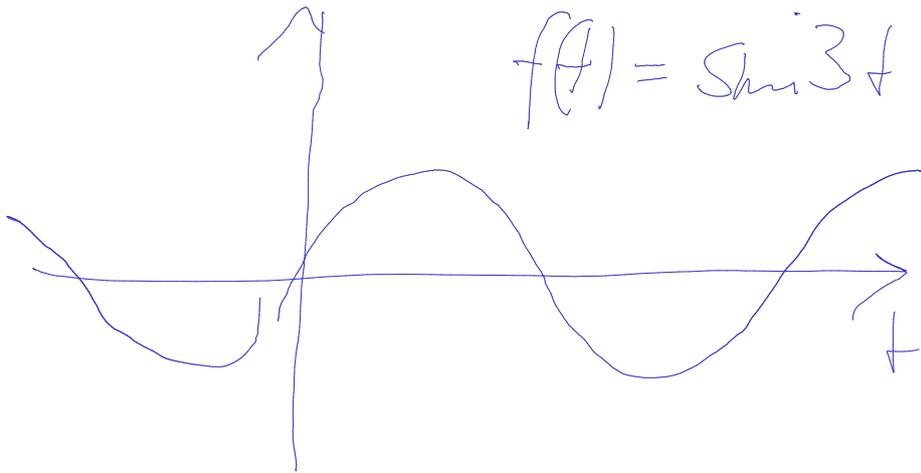
## Komplexe Darstellung

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} \quad \text{mit} \quad \gamma_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-ik\omega\tau} d\tau$$



$$F_f(t) = \frac{c_0}{2}$$

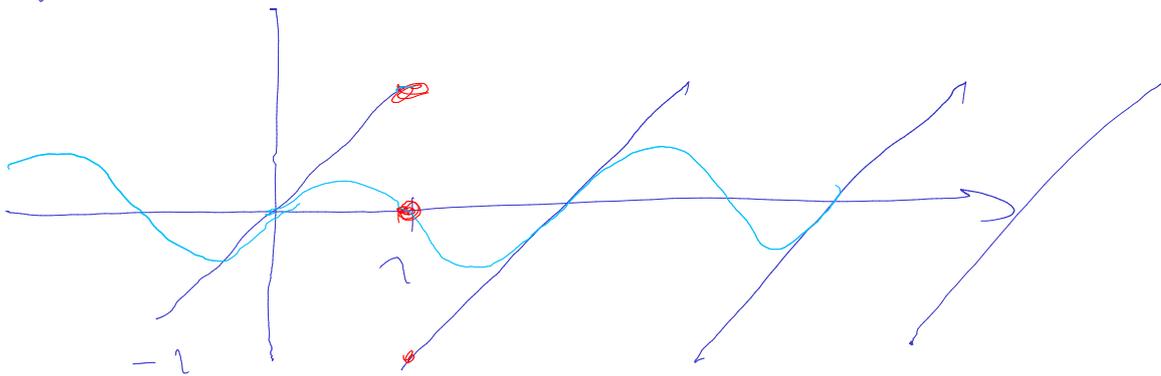
$$c_0 = c$$



$$f(t) = \sin 3t$$

$$F_f(t) = \sin 3t$$

gerade Fk  $\rightarrow$   $a_k = 0$   $k \in \mathbb{N}$   
 unger Fk  $\rightarrow$   $b_k = 0$   $k \in \mathbb{N}$



ungerade

$$F_f(1) = 0$$

# Die Fourier-Transformierte und das Fourier-Integral.

Betrachte jetzt den formalen Grenzwert  $T \rightarrow \infty$ , um eine Fourier-Entwicklung für nicht-periodische Funktionen zu erhalten

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \omega_{k+1} - \omega_k = \frac{2\pi}{T}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\omega_k t} \left( \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-i\omega_k \tau} d\tau \right) \Delta\omega$$

Riemannsche Summe mit  $\Delta\omega := \omega_{k+1} - \omega_k = 2\pi/T$ .

**Definition:** Die Funktion  $F(\omega)$  gegeben durch

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

heißt die **Fourier-Transformierte** oder **Spektralfunktion** von  $f(t)$ . Die Darstellung

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

nennt man das **Fourier-Integral** oder **Spektrale Zerlegung** von  $f(t)$ .

# Diskretes und kontinuierliches Spektrum.

## Bemerkung:

- Die Fourierkoeffizienten  $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  einer periodischen Funktion  $f(t)$  bilden das **diskrete Spektrum** von  $f$ .
- Die Fourier-Transformation  $(F(\omega))_{\omega \in \mathbb{R}}$  einer nicht-periodischen Funktion liefert das **kontinuierliche Spektrum**.

## Andere Schreibweisen:

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad \text{FT}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F](t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \text{Inverse FT}$$

Fourier-Transformation und inverse Fourier-Transformation.

# Reelle Darstellung der Fourier-Transformation.

**Bemerkung:** Durch Zerlegung in Real- und Imaginärteil erhält man die **reelle Darstellung** der Fourier-Transformation

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \overbrace{(\cos(\omega\tau) - i \sin(\omega\tau))}^{e^{-i\omega\tau}} d\tau \\ &= a(\omega) - ib(\omega) \end{aligned}$$

mit

$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau \quad (\text{gerade Funktion})$$

*← gerade in  $\omega$*

$$b(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin(\omega\tau) d\tau \quad (\text{ungerade Funktion})$$

*← ungerade in  $\omega$*

Entsprechend gilt folgende reelle Darstellung des Fourier-Integrals.

*falls  $f(\tau)$  gerade  $\Rightarrow b(\omega) = 0 \Rightarrow F(\omega)$  reell*  
 *$f(\tau)$  ungerade  $\Rightarrow a(\omega) = 0 \Rightarrow F(\omega)$  rein imaginär*

# Reelle Darstellung des Fourier-Integrals.

Dann gilt auch die folgende Darstellung des Fourier-Integrals

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(a(\omega) - ib(\omega))}_{F(\omega)} \underbrace{(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))}_{e^{i\omega t}} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \underbrace{(a(\omega) \cos(\omega t))}_f + \underbrace{(b(\omega) \sin(\omega t))}_f d\omega \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin \omega t du = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} b(\omega) \cos \omega t d\omega = 0$$

**Zusammenfassung:** (Sinus-, Cosinus-Spektrum)

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (a(\omega) \cos(\omega t) + b(\omega) \sin(\omega t)) d\omega$$

$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos(\omega \tau) d\tau$$

$$b(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin(\omega \tau) d\tau$$

# Beispiel: Fourier-Transformierte des Rechteckimpulses.

Wir betrachten den **Rechteckimpuls** der Form

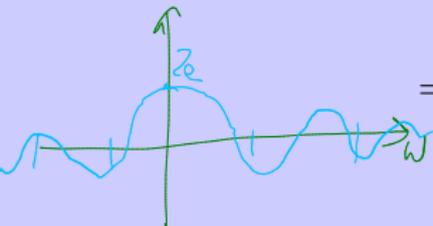
$$f(t) = \begin{cases} 1 & : -a \leq t \leq a \\ 0 & : |t| > a \end{cases}$$



Dann berechnet man

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-a}^a e^{-i\omega t} dt$$

$$= -\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{-a}^a = -\frac{1}{i\omega} \left( \underbrace{e^{-i\omega a} - e^{i\omega a}}_{-\sin(\omega a) \cdot 2i} \right) = \frac{2 \sin(\omega a)}{\omega}$$



$$= \begin{cases} \frac{2}{\omega} \sin(\omega a) & : \omega \neq 0 \\ 2a & : \omega = 0 \end{cases}$$

$$\frac{2 \sin(\omega a)}{\omega} = -\frac{1}{i\omega} \left( 1 - i\omega a - 1 - i\omega a \right) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 2a$$

## Fortsetzung des Beispiels.

Für die Umkehrung erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}[F](t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin(\omega a)}{\omega} e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega a)}{\omega} \cos(\omega t) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega(a+t))}{\omega} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega(a-t))}{\omega} d\omega\end{aligned}$$

Dies sind sogenannte **Dirichlet-Integrale** der Form

$$\text{CHW} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx$$

$$\frac{e^{i\alpha x}}{x} = f(x)e^{i\alpha x}$$

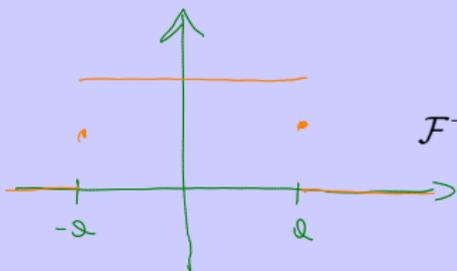
und man verwendet zur Berechnung den **Residuensatz**.

# Komplettierung des Beispiels.

Es folgt

$$\text{CHW} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx = \begin{cases} \pi & : \alpha > 0 \\ 0 & : \alpha = 0 \\ -\pi & : \alpha < 0 \end{cases}$$

Damit ergibt sich die Umkehrung in der Form



$$\mathcal{F}^{-1}[F](t) = \begin{cases} 1 & : |t| < a \\ \frac{1}{2} & : |t| = a \\ 0 & : |t| > a \end{cases}$$

Handwritten notes in pink and blue:

$$\frac{1}{2\pi} \begin{cases} \pi & + > -a \\ 0 & + = -a \\ -\pi & + < -a \end{cases} \quad \frac{1}{2\pi} \begin{cases} \pi & + < a \\ 0 & + = a \\ -\pi & + > a \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi} \begin{cases} 0 & + > a \\ \pi & + = a \\ 2\pi & - < + < a \\ 0 & + < -a \end{cases}$$

## Bemerkung:

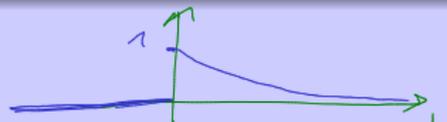
Man beachte insbesondere die **Mittelwerteigenschaft**

$$F_f(t) = \frac{1}{2} (f(t^+) + f(t^-))$$

# Ein weiteres Beispiel.

Gegeben sei mit  $a > 0$  die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & : t \geq 0 \\ 0 & : t < 0 \end{cases}$$



Dann gilt

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+i\omega)t} dt \\ &= -\frac{1}{a+i\omega} e^{-(a+i\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+i\omega} = \frac{e^{-i\omega}}{\omega^2 + a^2} \end{aligned}$$

Umkehrung wieder mit Hilfe des **Residuensatzes**

$$\mathcal{F}^{-1}[F](t) = \begin{cases} e^{-at} & : t > 0 \\ 0 & : t < 0 \end{cases}$$



und  $\mathcal{F}^{-1}[F](0) = 1/2$ .

# Fortsetzung des Beispiels.

## Konkrete Berechnung

$$\mathcal{F}^{-1}[F](t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a + i\omega} e^{i\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - ia} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x - ia} dx$$

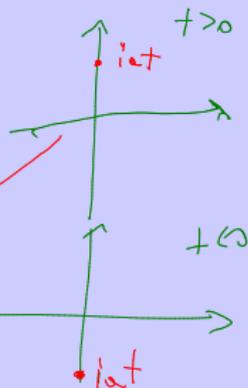
$$= \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{Res} \left( \frac{e^{iz}}{z - ia}; z_k \right)$$

$$= \begin{cases} e^{-at} & : t > 0 \\ 0 & : t < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \omega t &= x \\ d\omega &= dx \end{aligned}$$

$$\frac{e^{iz}}{z - ia} \Big|_{z_k = ia} = e^{i(ia)t} = e^{-at}$$

$$f(z) = \frac{1}{z - ia}$$



# Ein weiteres Beispiel.

Gegeben sei mit  $a > 0$  die Funktion

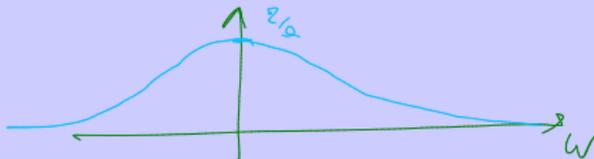
$$f(t) = e^{-a|t|}$$



gerade  
 $\Rightarrow F(\omega)$  reell

Dann gilt

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{(a-i\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(a+i\omega)t} dt \\ &= \frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} = \frac{a+i\omega}{a^2+\omega^2} + \frac{a-i\omega}{a^2+\omega^2} = \\ &= \frac{2a}{a^2+\omega^2} \end{aligned}$$



# Existenz und Eindeutigkeit der Fourier-Transformierten.

## Satz:

- a) Ist  $f(t)$  stückweise stetig und absolut integrierbar, d.h.  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ , so existiert die Fourier-Transformierte

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

für alle  $\omega \in \mathbb{R}$ . Das Integral konvergiert gleichmäßig und  $F(\omega)$  ist stetig.

- b) Ist  $f(t)$  eine stückweise  $C^1$ -Funktion und absolut integrierbar, so gilt für alle  $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{2} \left( f(t^-) + f(t^+) \right) = \text{CHW} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \frac{e^{i\omega t}}{2\pi} d\omega$$

- c) Sind  $f_1, f_2$  wie in b) mit  $F_1(\omega) = F_2(\omega)$  für alle  $\omega \in \mathbb{R}$ , so folgt  $f_1(t) = f_2(t)$  in allen Punkten  $t$ , in denen  $f_1$  und  $f_2$  stetig sind.

# Rechenregeln der Fourier-Transformation.

Im Folgenden seien  $f, g, \dots : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  stückweise stetig und absolut integrierbar. Mit  $F(\omega), G(\omega), \dots$  bezeichnen wir die entsprechenden Fourier-Transformierten.

- Linearität

$$\mathcal{F}[f + g](\omega) = \mathcal{F}[f](\omega) + \mathcal{F}[g](\omega)$$

$$\mathcal{F}[\alpha f](\omega) = \alpha \mathcal{F}[f](\omega) \quad (\alpha \in \mathbb{C})$$

- Konjugation

$$\mathcal{F}[\bar{f}](\omega) = \overline{F(-\omega)}$$

denn

$$\mathcal{F}[\bar{f}](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} e^{-i\omega t} dt = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(-\omega)t} dt} = \overline{\mathcal{F}[f](-\omega)}$$

*Handwritten annotations: Underlines under  $\overline{f(t)}$  and  $\overline{\mathcal{F}[f](-\omega)}$ . Blue arrows point from  $e^{-i\omega t}$  to  $e^{-i(-\omega)t}$  with the label  $e^{i\omega t}$  above and  $= e^{-i(-\omega)t}$  below.*

- Streckung

$$\mathcal{F}[f(ct)](\omega) = \frac{1}{|c|} F\left(\frac{\omega}{c}\right)$$

*Handwritten annotations: Underlines under  $f(ct)$  and  $\frac{\omega}{c}$ .*

# Rechenregeln der Fourier-Transformation.

- Streckung

$$\mathcal{F}[f(ct)](\omega) = \frac{1}{|c|} F\left(\frac{\omega}{c}\right)$$

denn

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(ct) e^{-i\omega t} dt &= \underbrace{\text{sgn}(c)} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega \frac{\tau}{c}} \frac{1}{c} d\tau \\ &= \frac{1}{|c|} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\frac{\omega}{c}\tau} d\tau = \frac{1}{|c|} \mathcal{F}[f]\left(\frac{\omega}{c}\right) \end{aligned}$$

*Handwritten notes:  $\omega t = \frac{\omega}{c} ct$ ,  $ct = \tau$ ,  $dt = \frac{1}{c} d\tau$*

- Verschiebungssätze

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-a) e^{-i\omega t} dt = e^{-i\omega a} \mathcal{F}[f](\omega)$$

$$\mathcal{F}[f(t-a)](\omega) = e^{-i\omega a} F(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iat} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(\omega-a)t} dt \quad \mathcal{F}[e^{iat} f(t)](\omega) = F(\omega - a)$$

Folgt durch direktes Einsetzen

# Rechenregeln der Fourier-Transformation.

- **Faltungssatz**

Man nennt

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau) d\tau$$

die **Faltung** der Funktionen  $f$  und  $g$ . Es gilt

$$\mathcal{F}[f * g](\omega) = \underline{F(\omega)} \cdot \underline{G(\omega)} \quad \text{und} \quad \mathcal{F}[f \cdot g](\omega) = \frac{1}{2\pi} (\underline{F * G})(\omega)$$

denn

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f * g] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau) d\tau \right) e^{-i\omega t} dt \quad e^{-i\omega(t-\tau)} e^{-i\omega\tau} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)e^{-i\omega(t-\tau)} dt \right) g(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= F(\omega) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau = F(\omega) \cdot G(\omega) \end{aligned}$$

# Ein Beispiel für den Faltungssatz.

Für die Faltung  $g = f * f$  des **Rechteck-Impulses**

$$F[f](\omega) = \begin{cases} \frac{2 \sin \omega}{\omega} & \omega \neq 0 \\ 2 & \omega = 0 \end{cases} \quad f(t) = \begin{cases} 1 & : -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & : |t| > 1 \end{cases}$$

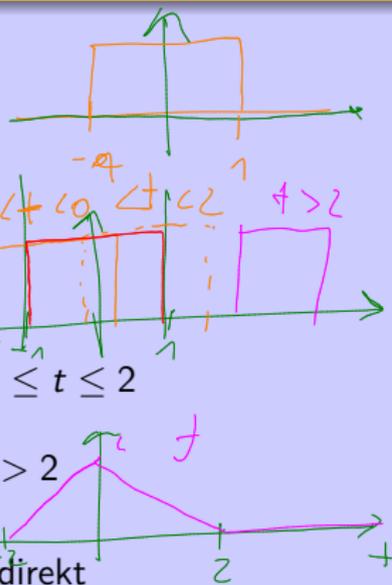
gilt

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) f(\tau) d\tau =$$

$$g(t) = \int_{-1}^1 f(t-\tau) d\tau = \begin{cases} 2 - |t| & : -2 \leq t \leq 2 \\ 0 & : |t| > 2 \end{cases}$$

Nach dem **Faltungssatz** folgt mit dem vorherigen Beispiel direkt

$$G(\omega) = F(\omega) \cdot F(\omega) = \begin{cases} \frac{4}{\omega^2} \sin^2 \omega & : \omega \neq 0 \\ 4 & : \omega = 0 \end{cases}$$



# Rechenregeln der Fourier-Transformation.

## • Differentiation

Ist  $f(t)$  eine stückweise  $C^1$ -Funktion mit endlich vielen Unstetigkeitsstellen  $\tau_1, \dots, \tau_m$  und sind  $f(t)$ ,  $f'(t)$  absolut integrierbar, so gilt

$$\mathcal{F}[f'](\omega) = i\omega F(\omega) - \sum_{k=1}^m (f(\tau_k^+) - f(\tau_k^-)) e^{-i\omega\tau_k}$$

Beweis mittels partieller Integration.

Ist  $f(t)$  sogar stetig, so folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-i\omega t} dt = f(t) e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} - (-i\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$
$$\mathcal{F}[f'](\omega) = i\omega F(\omega) = 0 - (-i\omega) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt}_{\mathcal{F}(f) = F}$$

und unter entsprechenden Voraussetzungen gilt sogar

$$\mathcal{F}[f^{(r)}](\omega) = (i\omega)^r F(\omega)$$

**Wesentliche Eigenschaft** zum Einsatz der Fourier-Transformation bei Differentialgleichungen.

# Beispiel.

Wir betrachten die **gewöhnliche Differentialgleichung**

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = c(t)$$

mit den Grenzbedingungen

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} y(t) = 0, \quad \lim_{|t| \rightarrow \infty} y'(t) = 0$$

Man berechnet nun die **Fourier-Transformation** der Differentialgleichung

$$\mathcal{F}[y](\omega) = Y(\omega)$$

$$\mathcal{F}[y'](\omega) = \underline{-i\omega} Y(\omega)$$

$$\mathcal{F}[y''](\omega) = \underline{-\omega^2} Y(\omega)$$

$$\mathcal{F}[c](\omega) = C(\omega)$$

Die Fourier-Transformation der Differentialgleichung lautet damit

$$\boxed{(-\omega^2 + i\omega a + b)Y(\omega) = C(\omega)}$$

algebraische Gl.  
in  $\omega$

## Fortsetzung des Beispiels.

Die **Fourier-Transformation** der Differentialgleichung lautet damit

$$(-\omega^2 + i\omega a + b)Y(\omega) = C(\omega)$$

und es ergibt sich

$$Y(\omega) = \frac{C(\omega)}{-\omega^2 + i\omega a + b}$$

Nach **Rücktransformation** ergibt sich

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C(\omega)}{-\omega^2 + i\omega a + b} e^{i\omega t} d\omega$$

und damit

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(\tau)}{-\omega^2 + i\omega a + b} e^{i\omega(t-\tau)} d\tau d\omega$$

# Anwendung der Fourier-Transformation bei partiellen Differentialgleichungen.

Wir betrachten das Anfangswertproblem für die **Wärmeleitungsgleichung**

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{für } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Eine Fourier-Transformation bezüglich der x-Variablen liefert

$$U_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) e^{-i\omega x} dx, \quad \underline{U(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\omega x} dx}$$

Damit folgt für die Wärmeleitungsgleichung

$$U_t = \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx} e^{-i\omega x} dx = -\omega^2 U$$

$$\boxed{U_t = (i\omega)^2 U,} \quad \text{für } t > 0, \omega \in \mathbb{R}$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung in  $t$  mit Parameter  $\omega$ .

$$U_t = -\omega^2 U \quad U(\omega, t) = U(\omega, 0) e^{-\omega^2 t}$$

# Anwendung der Fourier-Transformation bei partiellen Differentialgleichungen.

Daraus folgt

$$U(\omega, t) = U(\omega, 0)e^{-\omega^2 t} \quad \text{mit} \quad U(\omega, 0) = U_0(\omega)$$

und damit

$$U(\omega, t) = U_0(\omega)e^{-\omega^2 t}$$

**Rücktransformation:** Mit der gegebenen Anfangsbedingung haben wir die Beziehung

$$\mathcal{F}^{-1}[U_0] = u_0(x)$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[e^{-\omega^2 t}] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 t} e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 t + i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\omega - \frac{ix}{2t}\right)^2} e^{-\frac{x^2}{4t}} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4t}} \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

# Anwendung der Fourier-Transformation bei partiellen Differentialgleichungen.

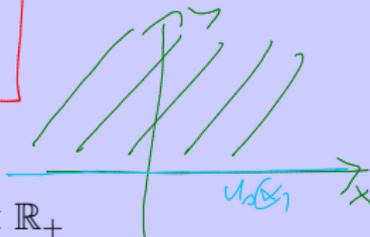
Aus dem Faltungssatz folgt dann

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}[U_0 e^{-\omega^2 t}] = u_0 * \left( \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} u_0(\xi) d\xi$$

*Handwritten notes:*  $\mathcal{F}^{-1}[u_0]$  with a downward arrow pointing to  $u_0$ ;  $\mathcal{F}^{-1}[e^{-\omega^2 t}]$  with a downward arrow pointing to the kernel  $\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ .

Weiteres Beispiel: Potentialproblem für die Halbebene

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{für } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$



Fourier-Transformation bezüglich  $x$  (bei festem  $y$ ) liefert die **Poissonsche Integralformel** für die Halbebene

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{y^2 + (x - \xi)^2} u_0(\xi) d\xi$$

# Ende der Vorlesung.

$$U(\omega, y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{-i\omega x} dx$$

$$U_0(\omega) = U(\omega, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{u(x, 0)}_{u_0(x)} e^{-i\omega x} dx$$

$$\underbrace{(-i\omega)^2}_{- \omega^2} U + U_{yy} = 0$$

Funktionsgleichung

$$e^{\omega y}, e^{-\omega y}$$

$$U(\omega, y) = \underbrace{U_0(\omega)}_{u_0(x)} e^{-|\omega|y}$$

$u_0(x)$

$\xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}} U_0(\omega)$

$\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}}$

$$= \frac{2y}{y^2 + x^2}$$

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} (u_0 * \left( \frac{2y}{y^2 + x^2} \right)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2y}{y^2 + (x-\xi)^2} u_0(\xi) d\xi$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{y^2 + (x-\xi)^2} u_0(\xi) d\xi$$

$$U_f = (f(u))_x$$

$$\mathcal{F}[u] = U$$

$$U_f = \mathcal{F}[f(u)]$$

$$\neq f \begin{bmatrix} \mathcal{F}(u) \\ \mathcal{F}(u) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{F}[u^2] = U * U$$