Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2021**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. H. P. Kiani

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 7 (Hausaufgaben)

Aufgabe 1:

Bestimmen und klassifizieren Sie alle isolierten Singularitäten der folgenden Funktionen.

a) $f(z) = \dfrac{\sinh(\frac{1}{z})}{z-2}$,

b) $f(z) = \dfrac{\sin(z) - z}{z^2(\frac{\pi^2}{4} - z^2)}$,

c) $f(z) = \dfrac{\ln(z)}{(z-1)^4}$.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1:

Hier werden in den Teilen a) und b) die bekannten Reihen von $\sin$ bzw. $\sinh$ verwendet. Man kann natürlich auch wie in Teil c) bzw. wie in den Präsenzübungen für die Funktion s argumentieren.

a) Für $f(z) = \dfrac{\sinh(\frac{1}{z})}{z-2} = \dfrac{1}{z-2} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-2k-1}}{(2k+1)!}$

liegt in $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität vor und wegen $\sinh(0.5) \neq 0$ in $z_1 = 2$ ein Pol erster Ordnung.

b)

$$f(z) = \frac{\sin(z) - z}{z^2(\frac{\pi^2}{4} - z^2)} = \frac{1}{(\frac{\pi}{2} - z)(\frac{\pi}{2} + z)} \cdot \frac{\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) - z}{z^2}$$

$$= \frac{1}{(\frac{\pi}{2} - z)(\frac{\pi}{2} + z)} \cdot \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}}{z^2} = \frac{1}{(\frac{\pi}{2} - z)(\frac{\pi}{2} + z)} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k-1}}{(2k+1)!}$$

In $z_0 := 0$ liegt also eine hebbare Singularität vor. Wegen $\sin(\pm\frac{\pi}{2}) \neq \pm\frac{\pi}{2}$ liegen in $z_{1,2} := \pm\frac{\pi}{2}$ Pole erster Ordnung vor.

c) $f(z) = \dfrac{\ln(z)}{(z-1)^4}$

Zur Berechnung der Taylorentwicklung von $g(z) := \ln(z)$ mit Enwicklungspunkt $z_0 := 1$ rechnet man

$\ln(1) = 0\,,$

$\ln(z)' = \frac{1}{z} \implies (\ln(z))'_{z=1} = 1\,.$

Damit lautet die Taylorentwicklung von $g(z) = \ln(z)$ mit $z_0 := 1$

$$T_g(z;1) = \ln(1) + (z-1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^n$$

und für $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-1)^4}$ erhält man:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^3} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^{n-4}.$$

Es liegt also ein Pol dritter Ordnung vor.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen jeweils diejenige Laurentreihe zum Entwicklungspunkt z_0, die im Punkt $z = -3/2$ gegen $f(-3/2)$ konvergiert.

a) $f(z) = z^3 \cos(\frac{1}{z})\,, \qquad z_0 = 0\,,$

b) $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z^2+z-2}\,, \qquad z_0 = 0\,,$

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} f(z) &= z^3 \cos(\frac{1}{z}) \\ &= z^3\left(1 - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{4!z^4} - \frac{1}{6!z^6} + \cdots\right) = \left(z^3 - \frac{z}{2} + \frac{1}{4!z} - \frac{1}{6!z^3} + \cdots\right) \end{aligned}$$

Die Funktion ist analytisch in $0 < |z| < \infty$. Die Laurentreihe ist

$$\begin{aligned} f(z) &= z^3 - \frac{z}{2} + \frac{1}{4!z} - \frac{1}{6!z^3} + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{-2k+3} = \sum_{k=-\infty}^{1} \frac{(-1)^{k+1}}{(2-2k)!} z^{2k+1} \end{aligned}$$

b)

$$f(z) = \frac{z^2+1}{z^2+z-2} = \frac{z^2+1}{(z+2)(z-1)} = \frac{z^2+1}{3}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2}\right)$$

hat isolierte Singularitäten in $z = 1$ und $z = -2$. Wir betrachten die Funktion also auf dem Ring $R_2 \;:\; 1 < |z| < 2$.

Zunächst bestimmen wir die Entwicklungen der einzelnen Terme:

$$|z| > 1 \;:\; \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{-1} z^k,$$

$$|z| < 2 \;:\; \frac{1}{z+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-(\frac{-z}{2})} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k}{2^k} = -\sum_{k=0}^{\infty} (-\frac{1}{2})^{k+1} z^k$$

Damit erhalten wir die folgende Entwicklungen der Funktion f im Ring $R_2 \;:\; 1 < |z| < 2$:

$$f(z) = \frac{z^2+1}{3}\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} (-\frac{1}{2})^{k+1} z^k\right)$$

Zusammenfassen ergibt

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{3}\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} z^{k+2} + \sum_{k=-\infty}^{-1} z^{k} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} z^{k+2} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} z^{k}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} 2z^{k} + z^0 + z^1 + \sum_{k=2}^{\infty}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} z^{k} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} z^{k}\right] - \frac{1}{2}z^0 + \frac{1}{4}z^1\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(2\sum_{k=-\infty}^{-1} z^{k} + \frac{1}{2} + \frac{5}{4}z + 5\sum_{k=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} z^{k}\right).
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: (Alte Klausuraufgabe)

Gegeben sei die Funktion f mit

$$f(z) \ = \ \frac{2z^2 - 3iz + 2}{(4z^2+1)\,(z^2+4)}\,.$$

a) Bestimmen und klassifizieren Sie alle isolierten Singularitäten von f.

b) Berechnen Sie die Residuen in allen isolierten Singularitäten von f.

c) Geben Sie die komplexe Partialbruchzerlegung von

$$\tilde{f}(z) \ = \ \frac{1}{(2z-i)(z+2i)}$$

an.

d) Berechnen Sie diejenige Laurent–Reihe von $\tilde{f}$ mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$, die für $z^* = 1$ gegen $f(1)$ konvergiert.

Lösung:

a) (4 Punkte)

$$f(z) \ = \ \frac{2z^2 - 3iz + 2}{4\left(z+\frac{i}{2}\right)\left(z-\frac{i}{2}\right)(z+2i)\,(z-2i)}\,.$$

Einsetzen der Nennernullstellen im Zähler:

$$Z\ddot{a}hler\left(-\frac{i}{2}\right) \ = \ -\frac{2}{4} - \frac{3}{2} + 2 = 0$$

$$(2z^2 - 3iz + 2) : (z + \frac{i}{2}) = 2z - 4i$$

$$\Longrightarrow f(z) := \frac{\left(z+\frac{i}{2}\right)(2z-4i)}{4\left(z+\frac{i}{2}\right)\left(z-\frac{i}{2}\right)(z+2i)\,(z-2i)}\,.$$

Die Singularitäten sind also:

$z_1 = -\frac{i}{2}$: hebbar,

$z_2 = +\frac{i}{2}$: einfacher Pol,

$z_3 = -2i$: einfacher Pol,

$z_4 = +2i$: hebbar.

b) (2 Punkte)

$$Resf(z_1) = Resf(z_4) = 0$$

$$Resf(z_2) = \left.\frac{1}{2(z+2i)}\right|_{z=\frac{i}{2}} = \frac{1}{5i} = -\frac{i}{5}$$

$$Resf(z_3) = \left.\frac{1}{(2z-i)}\right|_{z=-2i} = \frac{1}{-5i} = \frac{i}{5} \quad .$$

c) (1 Punkt)

für alle $z \neq z_1, z_4$ gilt $\tilde{f}(z) = f(z)$. Daher gilt

$$\tilde{f}(z) = \frac{-i}{5(z-i/2)} + \frac{i}{5(z+2i)} \; .$$

d) (3 Punkte)

Da die Singularitäten im Abstand von $1/2$ bzw. 2 von z_0 liegen und die Reihe für $z = 1$ gegen $\tilde{f}(1)$ konvergieren soll, ist die Laurent–Reihe für $0.5 < |z| < 2$ gesucht.

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(z) &= \frac{-i}{5z\left(1-\dfrac{i}{2z}\right)} + \frac{i}{10i\left(1-\dfrac{-z}{2i}\right)} \\
&= \frac{-i}{5z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{i}{2z}\right)^k + \frac{1}{10}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-z}{2i}\right)^k \\
&= -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^{k+1}}{5\cdot 2^k}\, z^{-k-1} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^k}{5\cdot 2^{k+1}} z^k \\
&= -\sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{i^{-k}}{5\cdot 2^{-k-1}}\, z^k + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^k}{5\cdot 2^{k+1}} z^k \\
&= \sum_{k=-\infty}^{-1} -\frac{2^{k+1}}{5\cdot i^k}\, z^k + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^k}{5\cdot 2^{k+1}} z^k
\end{aligned}$$

Abgabetermine: 06.07.21 - 10.07.21