Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 7 (Präsenzaufgaben)

Aufgabe 1:

a) Geben Sie für die folgenden Funktionen jeweils die isolierten Singularitäten an und klassifizieren Sie diese.

$$f(z) = \frac{2z^3+3z^2+2z+1}{z^3+z^4}\,, \quad g(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)(z-4)}\,,$$
$$h(z) = \frac{1}{z^2+2z+2} \quad \text{und} \quad s(z) = \frac{\sin(z)}{z\,(z^2+1)}\,.$$

b) Berechnen Sie die Residuen aller isolierten Singularitäten aus Teil a).

Lösungsskizze Aufgabe 1:

a) $f:\ z_0 = 0$: Pol 3. Ordnung, $z_1 = -1$ hebbar.

$g:\ z_k = k,\ k = 1,2,3,4$: Pole 1. Ordnung.

$h:\ z_{1,2} = -1 \pm i$: Pole 1. Ordnung.

$s:\ z_{1,2} = \pm i$: Da $\sin(\pm i) \neq 0$, sind z_1 und z_2 einfache Pole.

Für $z_0 = 0$ und $\forall z \neq 0$ gilt:

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \underbrace{\frac{\sin(z)}{z^2+1}}_{q(z)\text{ analytisch nahe }0} = \frac{1}{z} \cdot [q(0) + q'(0)(z-0) + \cdots]$$
$$= \frac{1}{z} \cdot \left[0 + z \cdot q'(0) + z^2 \cdot \frac{q''(0)}{2} + \cdots\right].$$

Damit liegt in $z_0 = 0$ eine hebbare Singularität vor.

Alternativ: $\forall z \neq 0$ gilt

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{\sin(z)}{z^2+1} = \frac{1}{z} \cdot \left(\frac{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}}{z^2+1} \right) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!}}{z^2+1}\,.$$

Die Laurent-Reihe enthält keine negativen Potenzen, also handelt es sich um eine hebbare Singularität.

b) $$Res(f;-1) \;=\; \left.\frac{2z^3+3z^2+2z+1}{z^3}\right|_{z=-1} \;=\; 0\,.$$

$$Res\,(f;0) = \frac{1}{2!}\left(\frac{2z^3+3z^2+2z+1}{1+z}\right)''_{z=0} \;=\; \frac{1}{2!}\,\left(2z^2+z+1\right)''_{z=0} \;=\; 2\,.$$

$$Res(g;1) \;=\; \left.\frac{1}{(z-2)(z-3)(z-4)}\right|_{z=1} \;=\; -\tfrac{1}{6}\,.$$

$$Res(g;2) \;=\; \left.\frac{1}{(z-1)(z-3)(z-4)}\right|_{z=2} \;=\; +\tfrac{1}{2}\,.$$

$$Res(g;3) \;=\; \left.\frac{1}{(z-1)(z-2)(z-4)}\right|_{z=3} \;=\; -\tfrac{1}{2}\,.$$

$$Res(g;4) \;=\; \left.\frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)}\right|_{z=4} \;=\; +\tfrac{1}{6}\,.$$

$$Res(h;-1+i) \;=\; \left.\frac{1}{(z^2+2z+2)'}\right|_{z=-1+i} \;=\; \frac{1}{2(-1+i+1)} \;=\; -\tfrac{i}{2}\,.$$

$$Res(h;-1-i) \;=\; \left.\frac{1}{(z^2+2z+2)'}\right|_{z=-1-i} \;=\; \tfrac{1}{2(-1-i+1)} \;=\; +\tfrac{i}{2}\,.$$

$$Res(s;0) = 0\,.$$

$$Res(s;i) = \lim_{z\to i}\frac{\sin(z)}{z\,(z+i)} \;=\; -\frac{\sin(i)}{2}\;\;.$$

$$Res(s;-i) = \lim_{z\to -i}\frac{\sin(z)}{z\,(z-i)} \;=\; \frac{\sin(i)}{2}\;\;.$$

Aufgabe 2:

$f,\ g,\ s,\ h$ seien die Funktionen aus Aufgabe 1. Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes die Integrale

$$\int_{|z|=\pi/2} f(z)dz\,,$$

$$\int_{|z|=\pi} g(z)dz\ ,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(z)dz\ ,$$

$\int_{|z|=\frac{1}{2}} s(z)dz\,,$ $\qquad$ $\int_{|z-i|=\frac{1}{2}} s(z)dz\ .$

Die Kreise sollen einmal in mathematisch positiver Richtung durchlaufen werden.

Lösungsskizze Aufgabe 2:

$$\int_{|z|=\pi/2} f(z) = 2\pi i(Res(f;0) + Res(f;-1)) = 4\pi i\,.$$

$$\int_{|z|=\pi} g(z) = 2\pi i(Res(g;1) + Res(g;2) + Res(g;3)) = -\pi i/3\,.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(z) = 2\pi i(Res(h;-1+i) = \pi\,.$$

$\int_{|z|=\frac{1}{2}} s(z)dz = 0$ $\qquad$ CIS bzw. Residuensatz .

$$\int_{|z-i|=\frac{1}{2}} s(z)dz = 2\pi i Res(s;i) = -\pi i\sin(i)\ .$$

Aufgabe 3: Bestimmen Sie für

$$f(z) \;=\; \frac{1}{(z+1)^2 \cdot (z-3)}$$

diejenige Laurent-Reihe zum Entwicklungspunkt $z_0 = -1$, die im Punkt $z = 5$ gegen $f(5)$ konvergiert.

Lösung:

f hat isolierte Singularitäten in $z = -1$ und $z = 3$. Wir betrachten die Funktion also auf dem Ring $R \,:\, 4 < |z - (-1)|$.

In diesem Ring gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z-3} &= \frac{1}{(z-(-1))-1-3} = \frac{1}{(z+1)-4} \\
&= \frac{1}{(z+1)} \cdot \frac{1}{1-\frac{4}{z+1}} = \frac{1}{(z+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k}{(z+1)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 4^k \cdot (z+1)^{-k-1} \\
\Longrightarrow f(z) &= \frac{1}{(z+1)^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 4^k \cdot (z+1)^{-k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} 4^k \cdot (z+1)^{-k-3} \\
&= \sum_{l=-\infty}^{-3} 4^{-l-3} \cdot (z+1)^l \,.
\end{aligned}$$

Bearbeitungstermine: 06.07 - 09.07.2021.