**Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg** **SoSe 2021**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. H. P. Kiani

# Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

## Blatt 6 (Hausaufgaben)

**Aufgabe 1:**

a) Berechnen Sie die folgenden Integrale, sofern sie definiert sind:

**i)** $\displaystyle\int_{C_1+C_2} \mathrm{Re}\,(z)\,dz,$ $C_1$ : der in mathematisch positiver Richtung durchlaufene Halbkreis

$|z|=1,\ \mathrm{Re}\,(z)\geq 0,$

$C_2$ die geradlinige Verbindung zwischen $i$ und $-i$,

**Tipp:** $\cos(t) \;=\; \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$,

**ii)** $\displaystyle\int_{C_3} \frac{1}{\bar{z}}\,dz,$ $C_3(t)=e^{(1+i)t},\quad t\in[-\frac{\pi}{4},\,\frac{\pi}{4}]\,,$

**iii)** $\displaystyle\int_{C_4} \frac{1}{1+z^2}\,dz,$ $C_4(t)=e^{it},\quad t\in[0,\,\pi]\,,$

**iv)** $\displaystyle\int_{C_5} \frac{2z}{1+z^2}\,dz,$ $C_5(t)=\frac{1}{2}e^{it},\quad t\in[0,\,\pi]\,.$

b) Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale. Die angegebenen Kurven sollen einmal in mathematisch positiver Richtung durchlaufen werden.

(i) $\displaystyle\oint_{C_k} \frac{e^z}{z}\,dz \qquad k=1,2 \quad C_1\ :\ |z|=1, \quad C_2 : |z-2|=1\,,$

(ii) $\displaystyle\oint_{C} \frac{z^2+2}{(z^3-z^2+z-1)}\,dz \qquad C\ :\ |z-0.5|=1$

**Lösungshinweise zur Aufgabe 1:**

a) (i) $I_1 := \int\limits_{C_1+C_2} \mathrm{Re}\,(z)\,dz$

$$\int\limits_{C_1+C_2} \mathrm{Re}\,(z)\,dz = \int\limits_{C_1} \mathrm{Re}\,(z)\,dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} \cdot ie^{it}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} i \cdot e^{2it} + i\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2it}}{2} + it\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{i\pi}}{2} - \frac{e^{-i\pi}}{2} + i\pi\right] = \frac{i\pi}{2}\,.$$

(ii) $I_2 := \int\limits_{C_3} \frac{1}{\bar{z}}\,dz, \qquad C_3(t) = e^{(1+i)t}, \quad t \in [-\pi/4, \pi/4]\,, \quad \dot{C}_3(t) = (1+i)e^{(1+i)t}$

$$I_2 := \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{e^{(1-i)t}}(1+i)e^{(1+i)t}\,dt = \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} (1+i)e^{2it}\,dt = \frac{1+i}{2i}\left[e^{2it}\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = 1+i\,.$$

(iii) Der Integrand ist für $t = \frac{\pi}{2}$ nicht definiert!

(iv) $\displaystyle\int\limits_{C_5} \frac{2z}{z^2+1}dz = \left[\ln(z^2+1)\right]_{C_5(0)}^{C_5(\pi)} = \ln(\frac{e^{2\pi i}}{4}+1) - \ln(\frac{e^0}{4}+1) = \ln(\frac{5}{4}) - \ln(\frac{5}{4}) = 0\,.$

b) (i) Nach der Cauchyschen Integralformel ist $\displaystyle\oint\limits_{C_1} \frac{e^z}{z}\,dz = 2\pi i e^0 = 2\pi i$

Nach dem Cauchyschen Integralsatz ist $\displaystyle\oint\limits_{C_2} \frac{e^z}{z}\,dz = 0.$

(ii) $\displaystyle\frac{z^2+1}{(z^3-z^2+z-1)} = \frac{z^2+1}{(z^2+1)(z-1)}\,.$

Die Punkte $\pm i$ liegen außerhalb von $|z-0.5| \leq 1$. Also gilt

$$\oint\limits_{|z-0.5|=1} \frac{z^2+2}{(z^3-z^2+z-1)}\,dz = \oint\limits_{|z-0.5|=1} \frac{\frac{z^2+2}{z^2+1}}{(z-1)}\,dz = 2\pi i\left(\frac{1^2+2}{1^2+1}\right) = 3\pi i\,.$$

(Cauchysche Integralformel mit $f(z) = \frac{z^2+2}{z^2+1}$ )

**Aufgabe 2)**

a) Es sei $C$ der einmal in mathematisch positiver Richtung durchlaufene Einheitskreis $|z| = 1$.

   (i) Berechnen Sie $$\int_C \frac{1}{(e^z - i)}\, dz\,.$$

   (ii) Für eine auf $\mathbb{C}$ analytische Funktion gelte $|\,f(z)\,| = 4$ überall auf der Kurve $C$ und $f(0) = 4i$. Wie muss dann $f$ aussehen?

b) Sei $C$ eine doppelpunktfreie geschlossene stückweise $C^1$ Kurve. Wann ist das Integral
$$I(C) := \int_C \frac{z}{z^2+1}\, dz$$
definiert?

Welche Werte kann das Integral annehmen, wenn es definiert ist?

**Lösungshinweise zur Aufgabe 2:**

a) (i) $e^z = i \iff e^x e^{iy} = i \iff x = 0$ und $y = 2k\pi + \pi/2$.
Da $|2k\pi + \pi/2| \geq \pi/2$ ist, ist der Integrand in $|z| \leq 1 < \pi/2$ analytisch. Daher gilt
$$\int_{|z|=1} \frac{1}{(e^z - i)}\, dz = 0\,.$$

(ii) Nach Vorlesung (Maximumprinzip) ist $f$ konstant, also $f(z) = 4i$.

b) Das Integral existiert, sofern die Kurve weder durch $i$ noch durch $-i$ geht. Die Kurve ist einfach geschlossen (doppelpunktfrei), also werden die Punkte $i$ und $-i$ nicht mehrmals umlaufen.

Wenn die Kurve positiv orintiert ist, können folgende vier Fälle auftreten:

(i) Keines der Punkte $\pm i$ wird von der Kurve umlaufen. Dann folgt aus dem Cauchy Integralsatz
$$I(C) = 0$$

(ii) Der Punkt $-i$ wird von der Kurve umlaufen, aber nicht der Punkt $i$. Dann gilt
$$I(C) = \int_C \frac{\frac{z}{z-i}}{z+i}\, dz = 2\pi i \left[\frac{z}{z-i}\right]_{z=-i} = 2\pi i \,\frac{-i}{-2i} = \pi i$$

(iii) Der Punkt $i$ wird von der Kurve umlaufen, aber nicht der Punkt $-i$. Dann gilt
$$I(C) = \int_C \frac{\frac{z}{z+i}}{z-i}\, dz = 2\pi i \left[\frac{z}{z+i}\right]_{z=i} = 2\pi i \frac{i}{2i} = \pi i$$

(iv) Beide Punkte werden umlaufen. Dann erhält man mit Hilfe der Partialbruchzerlegung $\dfrac{z}{z^2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i}\right)$

$$I(C) = \frac{1}{2}\int_C \frac{1}{z+i}\,dz + \frac{1}{2}\int_C \frac{1}{z-i}\,dz = \frac{1}{2}2\pi i + \frac{1}{2}2\pi i = 2\pi i$$

Bei einer negativ orientierten Kurve erhält man entsprechend die Werte $0$, $-\pi i$, $-2\pi i$.

**Abgabetermine:** 22.06 - 25.06.2021