Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6 (Präsenzaufgaben)

Aufgabe 1: Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\oint_{C_1} \frac{\pi e^{iz^2}}{(z-i)^2}\,dz \qquad C_1 : [0,2\pi] \to \mathbb{C},\ C_1(t) = 2\,e^{it},$

b) $\displaystyle\oint_{C_2} \frac{z\cos(2z)}{(z-\frac{\pi}{3})^3}\,dz \qquad C_2 : [0,2\pi] \to \mathbb{C},\ C_2(t) = 1+e^{it},$

c) $\displaystyle\oint_{C_3} \frac{z\cos(2z)}{(z-\frac{\pi}{3})^3}\,dz \qquad C_3 : [0,6\pi] \to \mathbb{C},\ C_3(t) = \tfrac{1}{2}\,e^{2it},$

d) $\displaystyle\oint_{C_4} \frac{z\cos(2z)}{(z-\frac{\pi}{3})^3}\,dz \qquad C_4 : [0,6\pi] \to \mathbb{C},\ C_4(t) = 1+2e^{it},$

e) $\displaystyle\oint_{C_5} \frac{1}{z^2+2z+10}\,dz\,, \quad C_5 : [0,4\pi] \to \mathbb{C},\ C_5(t) = -i+3\,e^{-it}.$

Lösung zur Aufgabe 1:

a) Nach der zweiten Cauchyschen Integralformel gilt

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \;=\; 2\pi i\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

$$\oint_{C_1} \frac{\pi e^{iz^2}}{(z-i)^2} \;=\; 2\pi i\left(\pi e^{iz^2}\right)'_{z=i} \;=\; 2\pi^2 i^2\cdot 2ie^{i^3} \;=\; -4\pi^2 ie^{-i}\,.$$

b) Wegen $(z\cos(2z))'' \;=\; (-2z\sin(2z)+\cos(2z))' \;=\; -4z\cos(2z)-4\sin(2z)$ erhält man mit der zweiten Cauchyschen Integralformel

$$I_2 := \oint_{C_2} \frac{z\cos(2z)}{(z-\frac{\pi}{3})^3}\,dz = \;\pi i\left[-4z\cos(2z)-4\sin(2z)\right]_{z=\frac{\pi}{3}} \;= 2\pi i(\frac{\pi}{3}-\sqrt{3})$$

c) Aus dem Cauchy-Integralsatz folgt $\displaystyle\oint_{C_3} \frac{z\cos(2z)}{(z-\frac{\pi}{3})^3}\,dz \;=\; 0\,.$

d) C_4 umläuft die Nennernullstelle ebenso wie C_2 in mathematisch positiver Richtung, allerdings drei mal. Daher erhalten wir

$$I_4 := \oint_{C_4} \frac{z\cos(2z)}{(z-\frac{\pi}{3})^3}\,dz = \;3I_2 = \;2\pi i(\pi-3\sqrt{3})\,.$$

e) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 2z + 10}$

Nennernullstellen: $z^2 + 2z + 10 = (z+1)^2 + 9 = 0 \iff z_{1,2} = -1 \pm 3i\,.$

$$\oint_{C_5} f(z)dz = \oint_{C_5} \frac{\frac{1}{z-(-1+3i)}}{z-(-1-3i)}\,dz = -2 \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{-1-3i-(-1+3i)} = \frac{2\pi}{3}.$$

Aufgabe 2: Gegeben seien die Funktionen

$$f_1(z) := \frac{e^z - 1}{e^{2z} + e^{-z}}, \qquad f_2(z) := \frac{1}{\ln(z-i)}, \qquad f_3(z) := \frac{1}{\ln(2+i-z)}.$$

Bestimmen Sie für $k = 1, 2, 3$ (ohne die jeweilige Reihe zu berechnen) den Radius des größten Kreises um Null, in dem die jeweilige Taylor Reihe T_k von f_k mit Entwicklungspunkt Null gegen f_k konvergiert.

Lösung zu Aufgabe 2:

f_1 : der Nenner wird Null für

$e^{3z} = e^{3x} \cdot e^{3yi} = -1 = e^{i(2k+1)\pi} \iff x = 0\,, \quad y = \frac{(2k+1)\pi}{3}$

mit einem $k \in \mathbb{Z}$. Die Reihe konvergiert im Kreis mit Radius $r = \dfrac{\pi}{3}$ um Null gegen f.

Die Taylorreihen für f_2 bzw. f_3 konvergieren dort, wo $\ln$ definiert ist, und der Nenner nicht verschwindet.

Für f_2 bedeutet dies einerseits

$z - i \neq 1 \iff z \neq 1 + i$

und andererseits

$x + iy - i \notin \mathbb{R}^- \cup \{0\} \iff z \neq x + i \text{ mit } x \leq 0$

Also ist $r_2 = |0 + i| = 1$.

Für f_3 erhält man analog einerseits

$2 + i - z \neq 1 \iff z \neq 1 + i$

und andererseits

$2 + i - x - iy \notin \mathbb{R}^- \cup \{0\} \iff z \neq x + i \text{ mit } x \geq 2$

Also ist $r_3 = |1 + i| = \sqrt{2}$.

Bearbeitungstermine: 29.06 - 02.07.2021