

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5 (Hausaufgaben)

Aufgabe 1:

- a) Sei f eine analytische Funktion mit konstantem Realteil. Wie sieht der Imaginärteil von f aus? Tip: Cauchy–Riemannsche Differentialgleichungen.
- b) Sei nun f analytisch mit Realteil $u(x + iy) = x^2 - y^2$. Zeigen Sie, dass der Imaginärteil v von f bis auf eine Konstante bestimmt ist. Geben Sie f als Funktion von $z = x + iy$ an.
- c) Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen lauten in Polarkoordinaten

$$ru_r = v_\varphi, \quad rv_r = -u_\varphi.$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ fest vorgegeben. Prüfen Sie für welche $k \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$\frac{1}{k} \ln(r^n) + i\varphi$$

holomorph ist. Um welche bekannte(n) Funktion(en) handelt es sich dann?

- d) Es sei $f(z) = e^z$ für $z = x + iy \in \mathbb{C}$, mit $-\pi < y < \pi$.

Die implizit gegebene Kurve (Ellipse)

$$\Gamma_1 : \quad (\pi \cdot \operatorname{Re}(z))^2 + (6 \cdot \operatorname{Im}(z))^2 = 2\pi^2$$

und die Kurve (Gerade)

$$\Gamma_2(t) = t + i \cdot \frac{\pi}{6}, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

gehen beide durch den Punkt $z^* = 1 + i \cdot \frac{\pi}{6}$.

Um welchen Winkel werden die (Tangenten an die beiden) Kurven im Punkt z^* durch f gedreht?

Lösung:

a)

$$f(x + iy) = u(x + iy) + v(x + iy), \quad u = c \in \mathbb{C}$$

$$u_x = v_y \implies 0 = v_y \implies v = g(x) + c_1$$

$$u_y = -v_x \implies 0 = -g_x \implies g(x) = c_2 \implies v = c_2 + c_1 = \text{konst.}$$

b)

$$u(x + iy) = x^2 - y^2$$

$$u_x = 2x = v_y \implies v = 2xy + g(x)$$

$$u_y = -2y = -v_x \implies v = 2xy + h(y)$$

Insgesamt also $v = 2xy + c$ und damit

$$f = x^2 - y^2 + 2ixy + ic = z^2 + ic$$

c) Es muss gelten

$$rn \frac{1}{k} r^{n-1} \frac{1}{r^n} = 1$$

Also $k = n$. Dann handelt es sich aber um die $\ln(z)$ Funktion!

d) Γ_2 ist die zur reellen Achse parallele Gerade, deren Punkte alle den festen Imaginärteil $\frac{\pi}{6}$ haben. Für z auf Γ_2 gilt also

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

Das Bild ist also der Strahl mit Winkel $\frac{\pi}{6}$ durch Null. Dieser wird, wenn man Γ_2 von links nach rechts durchläuft, von Null bis Unendlich durchlaufen. Die Tangenten an Γ_2 und $f(\Gamma_2)$ sind jeweils die Kurven selbst. f bewirkt also eine Drehung der Tangenten um $\frac{\pi}{6}$.

Da f in der gesamten komplexen Zahlenebene holomorph ist, werden die Tangenten an allen Kurven die z^* durchlaufen, um den gleichen Winkel gedreht. Man muss für Γ_1 also nichts mehr rechnen!

Alternativ) Noch einfacher: Da f holomorph ist, werden durch f in z^* alle Richtungen um den Winkel $\arg f'(z^*) = \arg(e^{z^*}) = \arg(e^1 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}) = \frac{\pi}{6}$ gedreht.

Aufgabe 2: Gegeben seien die Kreisscheiben

$$\tilde{K}_1 : |z + 5| \leq 4 \text{ und } \tilde{K}_2 : |z - 5| \leq 4.$$

Die Kreisscheibe \tilde{K}_1 möge ein elektrostatisches Potential von 0 und die Kreisscheibe \tilde{K}_2 ein elektrostatisches Potential von 1 haben.

Zur Bestimmung des induzierten elektrostatischen Potentials soll das Gebiet außerhalb der Kreisscheiben bijektiv und konform auf einen Ring (Gebiet zwischen zwei konzentrischen Kreisen) abgebildet werden.

- Bilden Sie dazu die Ränder der Kreisscheiben, also die beiden Kreise

$$K_1 : |z + 5| = 4 \text{ und } K_2 : |z - 5| = 4$$

mit Hilfe einer Möbius-Transformation auf konzentrische Kreise um Null ab. Der kleinere der beiden Bildkreise soll den Radius 1 haben.

Hinweis: bestimmen Sie zwei Punkte z und z' , die symmetrisch zu beiden Kreisen K_1 und K_2 liegen und bilden Sie diese auf Null und ∞ ab. Alternativ können Sie die Seiten 60, 61 der Vorlesung verwenden.

- Lösen Sie das Problem in der Modellebene, also für den Ring. Beachten Sie Aufgabe 2 Präsenzaufgabenblatt 4, DGL II.
- Geben Sie die Lösung des ursprünglichen Problems, als Funktion von z an.

Lösungsskizze zu 2:

- Wir suchen Punkte z und z' , die symmetrisch zu beiden Kreisen K_1 und K_2 liegen. Die beiden Punkte müssen sowohl auf einem Strahl ausgehend von $M_1 = -5$, als auch auf einem Strahl ausgehend von $M_2 = 5$ liegen. Damit liegen sie auf der Verbindung der beiden Mittelpunkte, also auf der reellen Achse. Es ist also z.B. $z = a \in \mathbb{R}$ und $z' = a' \in \mathbb{R}$. **(2 Punkte)**

Wegen der Kreissymmetrie muss gelten:

$$(a-5)\overline{(a'-5)} = 4^2 = (a-(-5))\overline{(a'-(-5))} \implies -5(a+a') = 5(a+a') \iff a' = -a.$$

Dies eingesetzt in eine der obigen Gleichungen ergibt

$$25 - a^2 = 16 \iff a = \pm 3, \text{ also z.B. } z = -3, z' = 3. \quad \textbf{(2 Punkte)}$$

Mit der Transformation

$$T(z) = \alpha \frac{z-3}{z+3}. \quad \textbf{(2 Punkte)}$$

gilt dann $T(3) = 0$, $T(-3) = \infty$.

Für $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ gilt $T(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Die Kreise K_1 und K_2 liegen symmetrisch zu \mathbb{R} und gehen nicht durch den Punkt $z = -3$ (Nennernullstelle). Sie werden also auf echte Kreise symmetrisch zu \mathbb{R} (d.h. mit Mittelpunkt auf \mathbb{R}) abgebildet. **(1 Punkt)**

Es gelten:

$$T(-1) = -2\alpha, \quad T(-9) = 2\alpha \quad \implies M_1 = 0, R_2 = 2\alpha,$$

$$T(1) = \frac{-\alpha}{2}, \quad T(9) = \frac{\alpha}{2} \quad \implies M_2 = 0, R_2 = \frac{\alpha}{2}.$$

Wählt man nun noch $\alpha = 2$, so erhält man als Bild von K_2 den Einheitskreis und als Bild von K_1 einen Kreis mit Radius 4 um Null.

$$T(z) = \frac{2z - 6}{z + 3}. \quad \mathbf{(3 Punkte)}$$

Alternativ: Vorlesung ab Seite 60:

Mit $a = 9, b = 1, p = 3$ und

$$\tilde{T}(z) = \frac{z + 3}{-z + 3}$$

erhält man konzentrische Kreise um Null mit der Radien $1/2$ und 2 .

Mit

$$\hat{T}(z) = \frac{2z + 6}{-z + 3}$$

erreicht man, dass die Kreise die Radien 1 und 4 haben.

$T(z)$ bildet K_2 auf den kleineren Bildkreis und $\hat{T}(z)$ bildet K_1 auf den kleineren Bildkreis ab. Wie so oft, gibt es nicht nur einen Weg zum Ziel!

- Wir rechnen mit $T(z) = \frac{2z - 6}{z + 3}$ weiter.

In der Modellebene ist zu lösen:

$$\begin{aligned} \Delta(\Psi) &= 0 \quad \text{außerhalb der beiden Kreise,} \\ \Psi(w) &= 0 \quad \text{für } |w| = 4, \\ \Psi(w) &= 1 \quad \text{für } |w| = 1. \end{aligned}$$

Da die Randwerte nicht vom Argument von w abhängen, können wir wie auf Blatt 4 DGL II einen rotationssymmetrischen Ansatz $\Psi(r, \phi) = f(r)$ machen und erhalten mit $g = f'$:

$$\begin{aligned} f'' + \frac{1}{r}f' &= 0, \implies g' + \frac{1}{r}g = 0 \implies g(r) = \alpha/r, \\ \implies f(r) &= \alpha \ln(r) + \beta = \Psi(r, \phi) \end{aligned}$$

Randdaten:

$$\Psi(1, \phi) = 1 \implies \beta = 1,$$

$$\Psi(4, \phi) = 0 \implies \alpha = -\frac{1}{\ln(4)}.$$

$$\Psi(r, \phi) = 1 - \frac{\ln(r)}{\ln(4)}.$$

Also

$$\Psi(u, v) = 1 - \frac{\ln(\sqrt{u^2+v^2})}{\ln(4)}.$$

- Das Potential in der physikalischen Ebene erhält man als $\Phi(z) = \Psi(T(z))$ also

$$\Phi(z) = 1 - \frac{1}{\ln(4)} \cdot \ln \left(\left| \frac{2z - 6}{z + 3} \right| \right).$$

Abgabetermine: 08.06.21 - 11.06.21