Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2021**
Prof. Dr. J. Struckmeier, Dr. H. P. Kiani

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5 (Präsenzaufgaben)

Aufgabe 1:

a) Für welche $k \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,,\; f(z) := (z+\bar{z})^2 - 4\,(\mathrm{Im}\,(z))^2 + i \cdot k \cdot \mathrm{Re}\,(z) \cdot \mathrm{Im}\,(z)$$

in jedem Punkt aus $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar?

b) Gegeben ist die Funktion

$$u(x+iy) = \mathrm{Re}\,(f(x+iy)) = x^2 + 2xy - y^2\,.$$

i) Zeigen Sie, dass die Funktion u harmonisch ist.

ii) Konstruieren Sie zu u eine konjugiert harmonische Funktion v, das heißt eine Funktion v, so dass $f = u + iv$ komplex differenzierbar ist.

iii) Kür: Können Sie die Funktion $f(z) = u(z) + iv(z)$ ohne explizite Verwendung von x und y, als Funktion von z angeben?

Lösung zu 1:

a) Mit der üblichen Bezeichnung $z = x + iy$ gilt
$f(z) = (x+iy+x-iy)^2 - 4y^2 + i \cdot kxy = \underbrace{(4x^2-4y^2)}_{u(x,y)} + i \cdot \underbrace{(kxy)}_{v(x,y)}\,.$

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen lauten:

$u_x = 8x \stackrel{!}{=} v_y = kx$ also $\boxed{k = 8}$

und

$-u_y = 8y \stackrel{!}{=} v_x = ky$ also wieder $\boxed{k = 8}$.

Für $k = 8$ ist f auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar.

b) i) $u_x = 2x + 2y,\; u_{xx} = 2, \qquad u_y = 2x - 2y,\; u_{yy} = -2$

also $\Delta u(x,y) = 0\,.$

ii) $f(z) = u(z) + iv(z),\; u(x+iy) = \mathrm{Re}\,(f(x+iy)) = x^2 + 2xy - y^2\,.$

$u_x = 2x + 2y \stackrel{!}{=} v_y \iff v(x,y) = 2xy + y^2 + c(x)\,,$

$$u_y \;=\; 2x - 2y \;\overset{!}{=}\; -v_x \;= -2y - c'(x)$$

$$\Longleftrightarrow c'(x) = \; -2x \;\Longrightarrow v(x,y) \;=\; 2xy + y^2 - x^2 + C\,, \qquad C \in \mathbb{R}\,.$$

iii)

$$\begin{aligned} f(x+iy) \;&=\; x^2 + 2xy - y^2 + i(-x^2 + 2xy + y^2) + iC \\ &=\; (1-i)(x^2 - y^2) + i(1-i)2xy + iC \;=\; (1-i)z^2 + iC\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Es sei $z = re^{i\phi}$, $r > 0$ und $f(z) = u(r, \phi) + iv(r, \phi)$. Dann lauten die Cauchy - Riemannschen-Differentialgleichungen

$$\boxed{u_r = \frac{1}{r} v_\phi\,, \qquad v_r = -\frac{1}{r} u_\phi}$$

(Nachweis: Kettenregel).

a) Sei $a > 0$ eine positive reelle Zahl. Weiterhin sei die Funktion g gegeben durch:

$$g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}\,,\; g(z) := |z|^2 + \frac{a^2}{|z|^2}\,.$$

In welchen Punkten aus $\mathbb{C}$ ist g komplex differenzierbar?
Tipp: Polarkoordinaten!

b) Welche der folgenden Funktionen sind im Punkt $z^* = \pi$ komplex differenzierbar? Welche der in $z^* = \pi$ differenzierbaren Funktionen ist in einer ganzen Umgebung des Punktes $z^* = \pi$ differenzierbar?

(i) $f(z) := \cos(\mathrm{Re}\,(z))\,, \quad z \in \mathbb{C}\,,$

(ii) $g(z) := \bar{z}^3\,, \quad \arg(z) \in]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}],\ |z| > 0\,.$ **Tipp: Polarkoordinaten!**

Lösungshinweise zur Aufgabe 2:

a) Mit $z = re^{i\phi}$ gilt

$$g(z) := |z|^2 + \frac{a^2}{|z|^2} = \underbrace{\left(r^2 + \frac{a^2}{r^2}\right)}_{u(r,\phi)} + i \cdot \underbrace{0}_{v(r,\phi)}\,.$$

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen lauten:

$v_r = 0 \stackrel{!}{=} -\frac{1}{r}u_\phi = 0$

und

$u_r = \left(2r - \frac{2a^2}{r^3}\right) \stackrel{!}{=} \frac{1}{r}v_\phi = 0\,.$

Die Funktion ist also genau dann komplex differenzierbar, wenn

$2r - \frac{2a^2}{r^3} = 0 \iff r = \frac{a^2}{r^3} \iff r^4 = a^2\,.$

g ist auf dem Kreis mit Radius $r = \sqrt{a}$ um Null komplex differenzierbar.

b) (i) (Cauchy-Riemannsche-Differentialgleichungen in kartesischen Koordinaten)

$z = x + iy$, $f(z) =: u(z) + iv(z) = \cos(\mathrm{Re}\,(z))$

f ist reellwertig, u und v sind stetig partiell differenzierbar nach x und y. Wegen

$$u(x, y) = \cos(x) \implies u_x = -\sin(x),\ u_y = 0,\ v_x = 0,\ v_y = 0$$

ist f nur in Punkten mit $\sin(x) = 0$ also in z_k mit $z_k = k\pi + ib,\ k \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{R}$ komplex differenzierbar. Also auch in $z_1 = \pi$, aber in keiner Umgebung von z_1.

(ii) $g(z) := \bar{z}^3, \quad \arg(z) \in]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}],\ |z| > 0\,.$

Cauchy-Riemannsche-Differentialgleichungen in Polarkoordinaten:
$u_r = \dfrac{1}{r} v_\phi\,, \qquad v_r = -\dfrac{1}{r} u_\phi$
Damit ergibt sich für $g(z) = \bar{z}^3 = r^3 \cdot e^{-i3\phi}, \qquad r \neq 0$

$$\begin{aligned}
g(z) &= u + iv = r^3 \cdot \cos(3\phi) - i \cdot r^3 \cdot \sin(3\phi) \\
u_r &= 3r^2 \cdot \cos(3\phi) \\
\frac{1}{r} v_\phi &= \frac{1}{r}\left[-r^3 \cdot 3\cos(3\phi)\right] = -u_r \\
v_r &= -3r^2 \cdot \sin(3\phi) \\
-\frac{1}{r} u_\phi &= -\frac{1}{r}\left[r^3(-3\sin(3\phi))\right] = -v_r
\end{aligned}$$

Die Funktion wäre nur für $\cos(3\phi) = \sin(3\phi) = 0$ komplex differenzierbar. Da Sinus und Cosinus (auch in $\mathbb{C}$) niemals gleichzeitig verschwinden, ist die Funktion nirgends komplex differenzierbar.

Bearbeitungstermine: 08.06.21 - 11.06.21