Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2021**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. H. P. Kiani

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4 (Hausaufgaben)

Aufgabe 1: (2+3+3+2 Punkte)

Bestimmen Sie die Bilder der folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}^*$ unter der Möbius-Transformation $T(z) = \dfrac{2z+4i}{z-4i}$.

a) $K_1 :=$ imaginäre Achse,

b) $K_2 := \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 4 \}$,

c) $K_3 :=$ reelle Achse,

d) $M := \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 4, \operatorname{Im}(z) < 0 \}$.

Lösung 1)

$$T(z) = \frac{2z+4i}{z-4i} \quad .$$

a) $K_1 := i\mathbb{R}$: wegen $4i \in K_1$ ist das Bild eine Gerade. Wegen $T(0) = -1$ und $T(\infty) = 2$ ist das Bild $g_1 =$ die reelle Achse. **(2 Punkte)**

b) $K_2 := \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 4 \}$: wegen $4i \in K_2$ ist das Bild eine Gerade. Da K_2 symmetrisch zu $i\mathbb{R}$ ist, ist das Bild $g_2 = T(K_2)$ symmetrisch zu $\mathbb{R}$ also senkrecht auf $\mathbb{R}$. **(2 Punkte)**

Wegen $\quad T(-4i) = \dfrac{-8i+4i}{-4i-4i} = \dfrac{1}{2}$

ist $\quad g_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = \dfrac{1}{2} \right\}$. **(1 Punkt)**

c) $K_3 :=$ reelle Achse: Wegen $4i \notin K_3$ ist das Bild ein echter Kreis K_4. Wegen der Symmetrie von K_3 zu K_1 und K_2 liegt der Mittelpunkt auf g_1 und g_2.

$\Longrightarrow M = \dfrac{1}{2}$. Wegen $T(0) = -1$ ist der Radius $R = \dfrac{3}{2}$.

$$T(M) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - \frac{1}{2}| = \frac{3}{2} \right\} \qquad \textbf{(3 Punkte)}$$

d) Wegen $T(4i) = \infty$ wird die untere Halbebene auf das Innere des Kreises K_4 abgebildet.

Wegen $T(0) = -1$ wird das Innere des Kreises K_2 auf die linke Seite der Geraden g_2 abgebildet.

Insgesamt erhalten wir also die linke Hälfte von K_4. Genauer:

$$T(M) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - \frac{1}{2}| < \frac{3}{2}, \operatorname{Re}(z) < \frac{1}{2} \right\} \qquad \textbf{(2 Punkte)}$$

Aufgabe 2) (4+3+3 Punkte)

a) Zur Lösung zweier Potentialprobleme sollen folgende Transformationen durchgeführt werden:

(i) Das Äußere der Ellipsenscheibe

$$E := \left\{ z = x + iy \in \mathbb{C} : \frac{16x^2}{25} + \frac{16y^2}{9} \leq 1 \right\} ,$$

also $\mathbb{C} \setminus E$, soll auf das Äußere des Einheitskreises $K_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ abgebildet werden.

(ii) Das Gebiet zwischen den durch $z = x + iy$ mit

$$\frac{4x^2}{3} - 4y^2 = 1 \iff \frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

definierten Hyperbelzweigen soll auf einen Sektor der Form

$$S := \{z \in \mathbb{C} : \phi_1 < \arg(z) < \phi_2 \}$$

abgebildet werden.

Geben Sie geeignete Transformationen an.

b) Funktioniert Ihre Methode zur Lösung von Aufgabenteil a)i) analog im Falle der Ellipse

$$E := \left\{ z = x + iy \in \mathbb{C} : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} \leq 1 \right\} ,$$

Lösung:

a) (i) Die Halbachsenlängen $a = \frac{5}{4}$ und $b = \frac{3}{4}$ erfüllen $a^2 - b^2 = 1$. Die Umkehrung der Joukowski Funktion macht also aus der Ellipse einen Kreis. Den Radius des Kreises erhält man z.B. durch Einsetzen eines Punktes aus dem Rand der Ellipse. Bei richtiger Wahl der Wurzel liefert

$$\tilde{f}(z) := z + \sqrt{z^2 - 1}$$

$$\tilde{f}\left(\pm \frac{5}{4}\right) = \pm 2, \qquad \tilde{f}\left(\frac{3i}{4}\right) = 2i .$$

Man erhält also einen Kreis mit Radius 2 um Null. Um den Einheitskreis zu erhalten, wählen wir

$$f(z) := \frac{1}{2}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

Wegen $f(0) = -i/2$ geht das Innere der Ellipse in das Innere des Einheitskreises über.

(ii) Es sei $J : \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\} \to \mathbb{C}$ die Jukowski Funktion auf der Oberen komplexen Halbebene. Dann bildet $J^{-1}(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$ die Hyperbelzweige auf Strahlen ab mit

$$\cos(\phi_{1,2}) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin(\phi_{1,2}) = \frac{1}{2}\,.$$

Als Bilder der Hyperbeläste erhalten wir also die Strahlen $re^{i\frac{\pi}{6}}$ und $re^{i\frac{5\pi}{6}}$. Wegen $J^{-1}(0) = i$ wird das Gebiet zwischen den Hyperbelästen auf den Sektor

$$S_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = re^{i\phi},\ \frac{\pi}{6} < \phi < \frac{5\pi}{6} \right\}$$

abgebildet.

b) Nein! Zwischen den Halbachsenlängen a, b und dem Radius r des Bildkreises gelten die Beziehungen:

$$a = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right), \qquad b = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)$$

also

$$a + b = r \qquad \text{und} \qquad a - b = \frac{1}{r}.$$

Bei der Ellipse aus Teil b) haben wir $a = 5$ und $b = 3$, also

$$a + b = 8 \neq \frac{1}{a - b} = \frac{1}{2}.$$

Nicht jede Ellipse um Null wird durch die Umkehrung der Jukowski Funktion auf einen Kreis um Null abgebildet, sondern nur diejenigen mit Brennpunkten ± 1, bzw. $a^2 - b^2 = 1$.

Abgabetermine: 25.05.21 - 28.05.21