Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4 (Präsenzaufgaben)

Aufgabe 1)

Gegeben sei die vom Parameter $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ abhängige Abbildung

$$T_\alpha : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \quad T_\alpha(z) := \frac{(1+i)z + (i-1)}{-\alpha z + i}.$$

a) Geben Sie alle $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ an, für die T_α eine Möbiustransformation ist.

In den Aufgabenteilen b) - e) wird nur die Möbiustransformation T_1 betrachtet:

$$T_1 : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \quad T_1(z) = \frac{(1+i)z + (i-1)}{-z + i}$$

b) Welches ist das Bild der imaginären Achse unter T_1 ?

c) Welches ist das Bild der reellen Achse unter T_1 ?

d) Welches ist das Bild des Einheitskreises $|z| = 1$ unter T_1 ?

e) Auf welche Menge wird dann die halbe Kreisscheibe

$$K := \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Re}\,(z) > 0 \text{ und } |z| < 1\}$$

abgebildet? Fertigen Sie dazu eine Skizze der Bildebene an!

Lösung 1)

a) T_α ist keine Mobiustransformation, falls

$$(1+i)i + \alpha(i-1) = 0 \iff \quad i - 1 + \alpha(i-1) = 0 \iff \quad \alpha = -1$$

Somit ist T_α für alle $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1\}$ eine Möbiustransformation.

b) Verallgemeinerte Kreise durch i werden auf Geraden abgebildet.

$$T_1(i) = \infty, \quad T_1(0) = \frac{i-1}{i} = 1 + i, \quad T_1(\infty) = \frac{1+i}{-1} = -1 - i.$$

Also ist das Bild die Gerade

$$\mathrm{Im}\,(z) = \mathrm{Re}\,(z).$$

c) **Möglichkeit 1:** Das Bild ist ein echter Kreis (da $i \notin \mathbb{R}$). Dieser ist symmetrisch zur Geraden

$$\mathrm{Im}\,(z) = \mathrm{Re}\,(z).$$

Wieder gilt: $T_1(0) = 1 + i$ und $T_1(\infty) = -1 - i$.
Das Bild ist demnach der Kreis $|z| = \sqrt{2}$.

Möglichkeit 2:

$$T_1(1) = \frac{1+i+i-1}{-1+i} = \frac{2i}{-1+i} = i(-1-i) = 1-i$$

Wieder gilt: $T_1(0) = 1 + i$ und $T_1(\infty) = -1 - i$.
Der Kreis der durch alle drei Punkte geht ist $|z| = \sqrt{2}$

d) **Möglichkeit 1:** Der Einheitskreis ist symmetrisch zur imaginären und reellen Achse. Das Bild ist eine Gerade. Diese steht auf Grund der Symmetrie senkrecht auf der Geraden $\mathrm{Im}\,(z) = \mathrm{Re}\,(z)$ und ist symmetrisch zum Kreis $|z| = \sqrt{2}$. Letzteres bedeutet, dass die Gerade durch den Ursprung gehen muss. Das Bild ist also die Gerade

$$\mathrm{Im}\,(z) = -\mathrm{Re}\,(z).$$

Möglichkeit 2:

$$T_1(-1) = \frac{-1-i+i-1}{1+i} = \frac{-2}{1+i} = -(1-i) = -1+i$$

Wieder gilt: $T_1(1) = 1 - i$ und $T_1(i) = \infty$. Das Bild ist die Gerade

$$\mathrm{Im}\,(z) = -\mathrm{Re}\,(z).$$

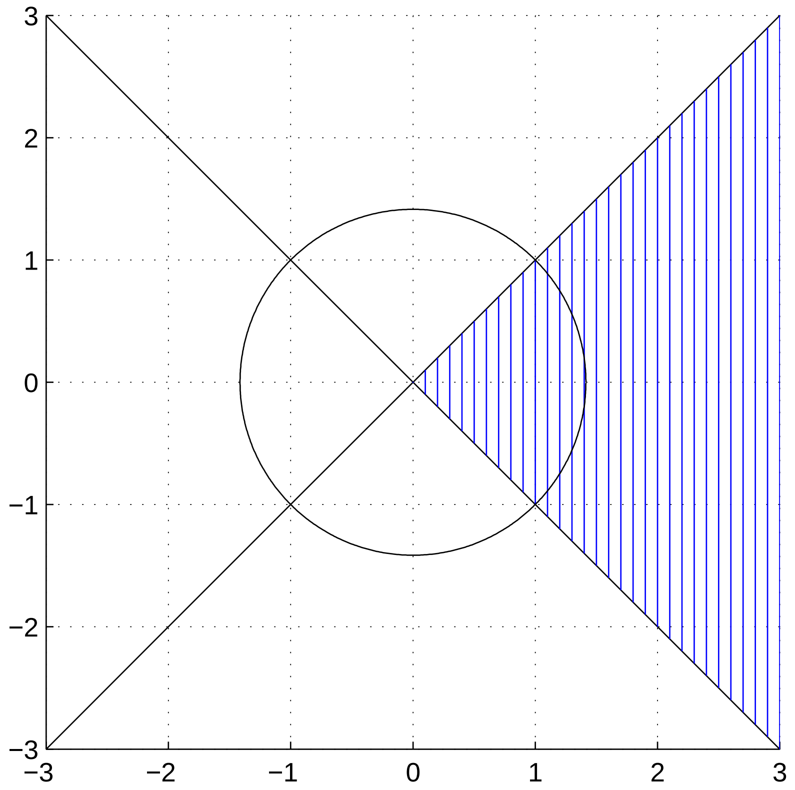
e) Das Bild von K wird durch die Geraden $\mathrm{Im}\,(z) = \mathrm{Re}\,(z)$ und $\mathrm{Im}\,(z) = -\mathrm{Re}\,(z)$ begrenzt. Wegen

$$T_1(1) = \frac{1+i+i-1}{-1+i} = \frac{2i}{-1+i} = i(-1-i) = 1-i$$

wird die rechte Halbebene auf das Gebiet unterhalb der Gerade $\mathrm{Im}\,(z) = \mathrm{Re}\,(z)$ abgebildet. Wegen

$$T(0) = 1 + i$$

wird das Innere des Einheitskreises auf das Gebiet oberhalb der Gerade $\mathrm{Im}\,(z) = -\mathrm{Re}\,(z)$ abgebildet.
Die Bildmenge ist also der Sektor $\{z \in \mathbb{C} :\ \arg(z) \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[\}$.


3
2
1
0
−1
−2
−3
−3
−2
−1
0
1
2
3

Aufgabe 2: (Dreipunktformel, Umkehrabbildung, Kreissymmetrie)

a) Geben Sie eine Möbiustransformation T mit

$$T(-i) = -2, \qquad T(i) = 0, \qquad T(2i) = \frac{1}{4}$$

an, und bestimmen Sie die inverse Abbildung T^{-1}.

b) Eine Möbius–Transformation $\tilde{T}$ bilde den Kreis $K : |z| = 2$ auf einen (echten) Kreis $\tilde{K}$ mit dem Mittelpunkt $\tilde{M}$ ab. Es gelte $\tilde{T}(-4i) = \tilde{M}$.

Welcher Punkt wird durch $\tilde{T}$ auf den unendlich fernen Punkt ∞ abgebildet?

Lösung 2:

a) Nach Vorlesung gilt für $w = T(z)$ und drei Punktepaaren $w_j = T(z_j)$, $j = 1, 2, 3$:

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \iff \frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$$

Hier also

$$\frac{w + 2}{w - 0} \cdot \frac{\frac{1}{4} - 0}{\frac{1}{4} + 2} = \frac{z + i}{z - i} \cdot \frac{2i - i}{2i + i} \iff \frac{w + 2}{w} = 3\,\frac{z + i}{z - i} \qquad (*)$$

und damit

$$w(z-i) + 2(z-i) = w(3z+3i) \iff 2(z-i) = w(2z+4i) \implies w = T(z) = \frac{z - i}{z + 2i}.$$

****

Alternativ: Es sei $T(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$. Dann folgt

$$T(i) = 0 \iff T(z) = \frac{z - i}{cz + d}$$

$$T(-i) = \frac{-2i}{-ci + d} = -2 \iff d = i(c + 1)$$

$$T(2i) = \frac{i}{2ic + i(c + 1)} = \tfrac{1}{4} \iff 2c + c + 1 = 4\,.$$ Also $c = 1$ und $d = 2i$.

Nach Vorlesung gilt für $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$

$$T^{-1}(w) = \frac{dw-b}{-cw+a}\,, \quad \text{hier also} \quad T^{-1}(w) = \frac{2iw+i}{-w+1}\,.$$

****

Alternativ: $w = \dfrac{z-i}{z+2i}$ nach z auflösen.

$$(z+2i)w = z-i \iff z(w-1) = -2iw-i \iff z = \frac{-2iw-i}{w-1}\,.$$

b) Der Mittelpunkt $\tilde{M}$ und ∞ liegen symmetrisch zu $\tilde{K}$. Das Urbild z_∞ von ∞ und das Urbild von $\tilde{M}$, also $-4i$ müssen symmetrisch zu K liegen. Nach Vorlesung also:

$$(-4i-0)(\bar{z}_\infty - \bar{0}) = 2^2 \iff i\,\bar{z}_\infty = -1 \iff \bar{z}_\infty = i \iff z_\infty = -i\,.$$

Bearbeitungstermine: 25.05.21 - 28.05.21