Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2021**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. H. P. Kiani

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 3 (Hausaufgaben)

Aufgabe 1:

a) Geben Sie eine Funktionsvorschrift an, die den Streifen $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ auf den Keil $\left\{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\right\}$ abbildet.

b) Geben Sie eine Funktionsvorschrift an, die den Streifen $\left\{z \in \mathbb{C} : -\dfrac{\pi}{8} < \operatorname{Re} z < 0\right\}$ auf den Keil $\left\{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\right\}$ abbildet.

Hinweis: Exponentialfunktion!

Lösung:

a) Die Exponentialfunktionen bildet den Streifen auf einen Sektor ab. Den Öffnungswinkel des Sektors kann man mit Hilfe einer Potenzfunktion anpassen:
$f = f_2 \circ f_1 \,:\, 0 < \operatorname{Im} z < \pi \;\longrightarrow\; 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$

$$f_1 \;:\; z \to w = e^z = e^x e^{iy} = r \cdot e^{i\varphi}, \text{ mit } r := e^x,\ \varphi := y, \text{ also } \varphi \in]0,\pi[,\ r \in \mathbb{R}^+$$

$$f_2 \;:\; w \to w^{\frac{1}{4}} = r^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\varphi}{4}}, \text{ mit } r^{\frac{1}{4}} \in \mathbb{R}^+,\ \frac{\varphi}{4} \in]0, \frac{\pi}{4}[, \qquad f(z) := (e^z)^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{z}{4}}$$

b) Die Exponentialfunktionen würde den Streifen auf einen Kreisring abbilden. Daher drehen wir hier zunächst um $-\frac{\pi}{2}$. Danach wird wie in Teil a) verfahren.

$$f_1 \;:\; z \to e^{-i\frac{\pi}{2}} z =: w = -ix + y; \quad \operatorname{Re} w \in (-\infty, \infty),\ 0 < \operatorname{Im} w < \frac{\pi}{8}$$

$$f_2 \;:\; w \to e^w =: \tilde{w} \qquad |\tilde{w}| \in]0, \infty[,\ \arg(\tilde{w}) \in]0, \pi/8[$$

$$f(z) := \left(e^{e^{-i\frac{\pi}{2}} z}\right)^2 = \left(e^{-iz}\right)^2 = e^{-2iz}.$$

Oder z.B.

$$z \to -2z = w, \qquad w \to e^{i\frac{\pi}{2}} w =: \tilde{w} \qquad \tilde{w} \to e^{\tilde{w}} = e^{iw} = e^{-2iz}.$$

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Menge $S = \{3 + r\cos(\phi) + ir\sin(\phi) : r \in]0, \infty[\ , \ \phi \in]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{8}[\} \subset \mathbb{C}$,

sowie die Abbildung

$$F(z) = \ln\left(e^{i\frac{\pi}{4}}(z-3)^2\right),$$

wobei $\ln$ den Hauptwert des komplexen Logarithmus bezeichnet.

a) Skizzieren Sie die Menge S in der komplexen Ebene.

Es bezeichne $F(S)$ das Bild von S unter der Abbildung F. Skizzieren Sie $F(S)$ und beschreiben Sie $F(S)$ explizit als Teilmenge von $\mathbb{C}$.

b) Bestimmen Sie das Bild $F(H)$ der Menge $H =]3, \infty[$ unter der Abbildung F.

c) Bestimmen Sie das Bild $F(R)$ der Menge $R = \{3 + 2e^{i\phi} : \phi \in] - \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{8}[\}$ unter der Abbildung F.

Lösung:)

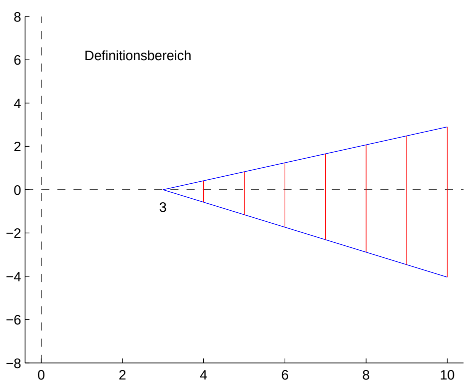
a) $\tilde{w} = z - 3 = \tilde{r}e^{i\tilde{\phi}} \iff \tilde{r} \in]0, \infty[, \ \tilde{\phi} \in] - \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{8}[$

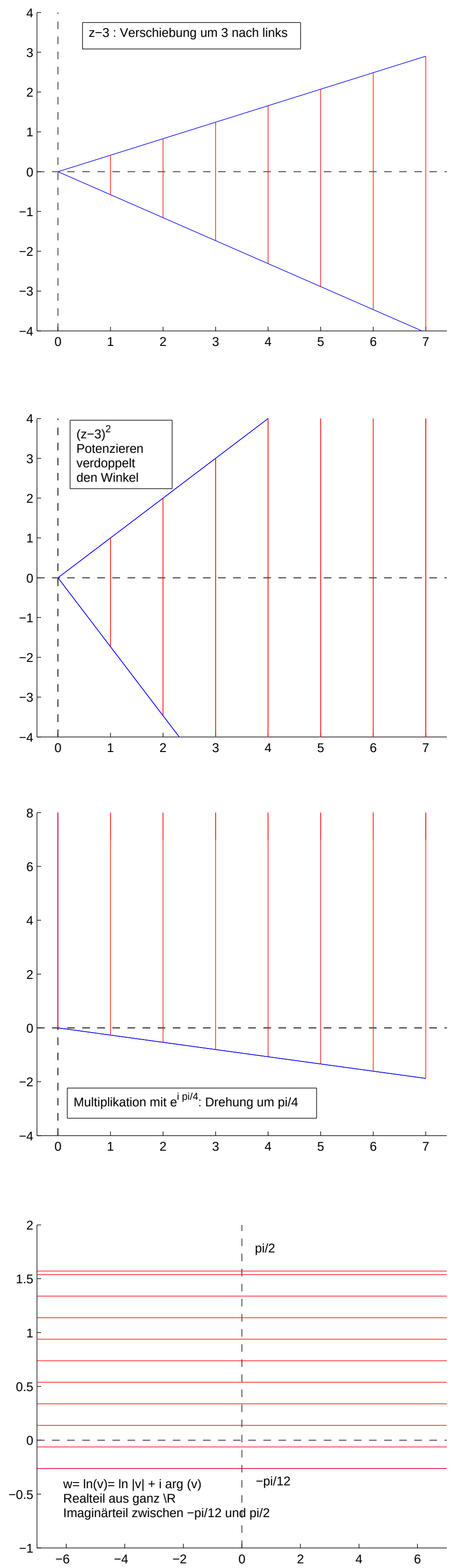
$\hat{w} = (z-3)^2 = \hat{r}e^{i\hat{\phi}} \iff \hat{r} \in]0, \infty[, \ \hat{\phi} \in] - \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}[$

$w^* = e^{i\frac{\pi}{4}}(z-3)^2 = r^* e^{i\hat{\phi}^*} \iff r^* \in]0, \infty[, \ \phi^* \in] - \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}[$

$f(z) = \ln(w^*) = \ln(|w^*|) + i \cdot \arg(w^*)$

$\Longrightarrow$ Re $(f(z)) \in] - \infty, \infty[$, Im $(f(z)) \in] - \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}[$




z−3 : Verschiebung um 3 nach links
(z−3)^2
Potenzieren
verdoppelt
den Winkel
Multiplikation mit e^{i pi/4}: Drehung um pi/4
pi/2
−pi/12
w= ln(v)= ln |v| + i arg (v)
Realteil aus ganz \R
Imaginärteil zwischen −pi/12 und pi/2

b) $H = (3, \infty) \implies f(H) = \ln\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\,\mathbb{R}^+\right)$

Für den Realteil von $f(z)$ mit $z \in H$ erhält man
$\mathrm{Re}\,(f(z)) = \ln(|e^{i\frac{\pi}{4}}\,x|) = \ln(|x|)$ mit $x \in \mathbb{R}^+$
Also $\mathrm{Re}\,(f(z)) \in \,]-\infty, \infty[\,.$

Für den Imaginärteil von $f(z)$ gilt
$\mathrm{Im}\,(f(z)) = \arg\,(e^{i\frac{\pi}{4}}\,x)$ mit $x \in \mathbb{R}^+$
Also $\mathrm{Im}\,(f(z)) = \frac{\pi}{4}\,.$

Das Bild ist eine Gerade parallel zur reellen Achse durch $i\,\frac{\pi}{4}\,.$

c) $f(R)$ für $R = \{3 + 2e^{i\phi} |\, \phi \in \,]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{8}[\}\,.$

$$f(3 + 2e^{i\phi}) = \ln\left(e^{i\frac{\pi}{4}}(3 + 2e^{i\phi} - 3)^2\right) = \ln\left(e^{i\frac{\pi}{4}}(2e^{i\phi})^2\right)$$
$$= \ln\left(4\,e^{i(2\phi+\frac{\pi}{4})}\right) = \ln(4) + i\cdot(2\phi + \frac{\pi}{4})\,.$$

Das Bild ist ein Geradenstück mit $\mathrm{Re}\,f(z) = \ln(4)$ und

$\mathrm{Im}\,(f(z) \in \,]\,\frac{\pi}{4} + 2\cdot(-\frac{\pi}{6}), \frac{\pi}{4} + 2\cdot(\frac{\pi}{8})\,[\, = \,]\,-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\,[\,.$

Abgabetermine: 03.5.21 - 07.05.21