Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2021**
Prof. Dr. J. Struckmeier, Dr. H. P. Kiani

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3 (Präsenzaufgaben)

Aufgabe 1) Exponentialfunktion

Es sei i die imaginäre Einheit.

a) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$e^{3z} - \frac{i}{e^z} = 0\,.$$

b) Sei R das Rechteck

$$R := \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, z = x + iy,\, x \in (0,2),\, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right\}\,.$$

Bestimmen Sie das Bild von R unter der Abbildung

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \qquad f(z) := i \cdot e^z$$

und fertigen Sie eine Skizze des Bildes an.

Lösung:

a) $e^{3z} - \frac{i}{e^z} = 0 \iff e^{4z} = i \iff |e^{4z}|e^{i\arg(e^{4z})} = |i|\, e^{i\arg(i)}$.
Zu erfüllen sind die beiden Gleichungen
$|e^{4z}| = |e^{4x} \cdot e^{4iy}| = e^{4x} \stackrel{!}{=} |i| = 1$
und
$\arg\,(e^{4z}) = 4y \stackrel{!}{=} \arg\,(i) + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$ **[2 Punkte]**
Also $x = 0$ und $y_k = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$ **[1 Punkt]**

b) $\tilde{f}(z) := e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} \implies$ **[1 Punkt]**
$\left|\tilde{f}(z)\right| = e^x \in (e^0, e^2) = (1, e^2)\,, \qquad \arg\left(\tilde{f}(z)\right) = y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
$f(z) = i \cdot \tilde{f}(z)$: um $\pi/2$ gedreht. Also
$|\,f(z)\,| = \left|\tilde{f}(z)\right| \in (1, e^2)$, **[1 Punkt]**
$\arg\,(\,f(z)\,) \in \left(\frac{\pi}{2}\,,\,\pi\right)$ **[1 Punkt]**
Skizze: Viertelkreisring im zweiten Quadranten mit Innenradius 1 und Außenradius e^2. **[1 Punkt]**

Aufgabe 2) Logarithmus

Es sei i die imaginäre Einheit.

a) Gegeben sei die Menge $R = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} \leq |z| \leq \frac{e^1}{2}, \operatorname{Im}(z) > 0\}$,
sowie die Abbildung

$$f(z) = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot \ln(2z),$$

wobei $\ln$ den Hauptwert des komplexen Logarithmus bezeichne. Skizzieren Sie die Menge R in der komplexen Ebene und bestimmen Sie das Bild von R unter der Abbildung f.

b) Zeigen Sie, dass für alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$
$\ln(-z) \neq \ln(z)$ gilt.

c) Was ist falsch an folgender Argumentation von Johann Bernoulli:

$$(-z)^2 = z^2 \iff \ln((-z)^2) = \ln(z^2)$$
$$2\ln(-z) = 2\ln(z) \iff \ln(-z) = \ln(z)\,?$$

Lösung:

a) Skizze: R ist die obere Hälfte des Ringes um Null mit Innenradius $\frac{1}{2}$ und Außenradius $\frac{e}{2}$. **[1 Punkt]**
$f(z) = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot \ln(2z)$.
Sei $\tilde{w} = 2z$ dann gilt $1 \leq |\tilde{w}| \leq e^1$ und $0 < \arg(\tilde{w}) < \pi$. **[1 Punkt]**
Für $\hat{w} = \ln(\tilde{w}) = \ln|\tilde{w}| + i\arg(\tilde{w})$ gilt dann
$\operatorname{Re}(\hat{w}) \in [\ln(1), \ln(e)] = [0,1], \qquad \operatorname{Im}(\hat{w}) \in (0,\pi)$. **[1 Punkt]**
Schließlich berechnen wir
$f(z) = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot \hat{w}$ und erhalten ein achsenparalleles Rechteck mit
$\operatorname{Re}(f(z)) \in (-\pi, 0), \qquad \operatorname{Im}(f(z)) \in [0,1]$. **[1 Punkt]**

b)

$$\ln(z) = \ln(|z|) + i\arg(z) \neq \ln(-z) = \ln(|z|) + i\arg(-z)$$

denn es gibt keine komplexe Zahl mit $\arg(z) = \arg(-z)$.

c) Falsch an der Argumentation
$(-z)^2 = z^2 \iff \ln((-z)^2) = \ln(z^2) \iff 2\ln(-z) = 2\ln(z) \iff \ln(-z) = \ln(z)$
ist, dass für den Hauptwert der Logarithmusfunktion in $\mathbb{C}$

$$\ln(z^2) = 2\ln(z)$$

nur gilt, wenn für den Hauptwert des Arguments von z

$$|\arg(z)| < \frac{\pi}{2}$$

gilt. Dann ist aber

$$|\arg(-z)| > \frac{\pi}{2}$$

und es gilt nicht

$$\ln((-z)^2) = 2\ln(-z).$$

Es ist z.B.

$$\ln(e^{i\frac{3\pi}{4}}) = i\,\frac{3\pi}{4}, \qquad \ln\left((e^{i\frac{3\pi}{4}})^2\right) = \ln(e^{i\frac{3\pi}{2}}) = -\,i\,\frac{\pi}{2} \neq i\,\frac{3\pi}{2}\,.$$

Für $z = e^{i\frac{\pi}{4}}$ gilt zwar

$$\ln(e^{i\frac{\pi}{4}}) = i\,\frac{\pi}{4}, \qquad \ln\left((e^{i\frac{\pi}{4}})^2\right) = \ln(e^{i\frac{\pi}{2}}) = i\,\frac{\pi}{2} = 2\ln(e^{i\frac{\pi}{4}})$$

dafür aber

$$\ln(-e^{i\frac{\pi}{4}}) = \ln(e^{-i\frac{3\pi}{4}}) = -i\,\frac{3\pi}{4}, \qquad \ln\left((-e^{-i\frac{\pi}{4}})^2\right) = \ln(e^{i\frac{\pi}{2}}) = i\,\frac{\pi}{2} \neq 2\cdot(-i\,\frac{3\pi}{4})\,.$$

Bearbeitungstermine: 03.05.21 - 07.05.21