**Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg** **SoSe 2021**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. H. P. Kiani

# Komplexe Funktionen
# für Studierende der Ingenieurwissenschaften

## Lösungen zu Blatt 2 (Hausaufgaben)

**Aufgabe 1:**

Berechnen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,(1+i)\,z^3 \;=\; i\,.$$

**Lösung:**

Geometrisch:

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(1+i)\,z^3 \;=\; i$ bedeutet $z^3$ um $\frac{\pi}{4}+2k\pi$ gedreht ist gleich $i$. Also

$z^3 = e^{i(\frac{\pi}{4}+2k\pi)} \iff z = \left(e^{i(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}\right)^{\frac{1}{3}} = e^{i(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3})}$

Analytisch:

$$z^3 = \sqrt{2}\,\frac{i}{1+i} \;=\; \frac{\sqrt{2}\,i(1-i)}{1^2-i^2} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,(1+i) = e^{i(\frac{\pi}{4}+2k\pi)} \iff z = e^{i(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3})}$$

Oder gleich polar:

$e^{i\frac{\pi}{4}}\,z^3 \;=\; e^{i\frac{\pi}{2}} \iff z^3 = e^{i\frac{\pi}{4}}\,.$

$|z|^3 \;=\; |z^3| \;=1 \iff |z|=1$

$3\arg(z) = \arg(z^3) \;=\; \arg\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right) + 2k\pi\,, \iff \arg(z) = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\,.$

**Aufgabe 2:**

a) Sei $c \in \mathbb{C}$ und $R \in \mathbb{R};\ R \geq 0$. Zeigen Sie, dass dann die Äquivalenz

$$|z-c| = R \iff z\bar{z} - c\bar{z} - \bar{c}z + c\bar{c} = R^2$$

gilt.

b) Welche Kurve wird folglich durch die Bedingung

$$z\bar{z} - \frac{i}{2}\bar{z} + \frac{i}{2}z = 0$$

beschrieben?

**Lösung:**

a) $|z-c| = R \iff (z-c)\,\overline{(z-c)} = R^2$

$\iff (z-c)\,(\overline{z} - \overline{c}) = R^2$

$\iff z\overline{z} - z\overline{c} - c\overline{z} + c\overline{c} = R^2$

b) Der Kreis um $\frac{i}{2}$ mit Radius $\frac{1}{2}$.

**Aufgabe 3:**

Gegeben sei die Abbildung $w = f(z) := \dfrac{1}{z}$ mit $z \neq 0$.

a) Bestimmen Sie die Bilder

   (i) der Strahlen $\arg(z) = \varphi_0$ ,

   (ii) der Geraden $\mathrm{Re}\,(z) = x_0$ ,

   (iii) der Geraden $\mathrm{Im}\,(z) = y_0$ .

b) Bestimmen Sie das Bild des Kreises $|z - \frac{i}{2}| = \frac{1}{2}$ ohne $z = 0$.

c) (Etwas anspruchsvoller) Zeigen Sie, dass das Bild eines Kreises, der nicht durch Null geht, ein Kreis ist. Bestimmen Sie den Mittelpunkt und den Radius des Bildkreises.

   Was ist folglich das Bild von $|z - 2| = 1$?

**Hinweis:** verwenden Sie Aufgabe 2.

**Lösung:**

a) (i) $f : z \to \frac{1}{z} \quad z = re^{i\varphi_0}$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\varphi_0}$ Strahl mit Winkel $-\varphi_0$ von außen nach innen durchlaufen!

(ii) $\mathrm{Re}\, z = x_0 \iff z + \overline{z} = 2x_0$

$\iff \frac{1}{w} + \frac{1}{\overline{w}} = 2x_0$

A) $x_0 = 0$

$\frac{1}{z}$ nicht definiert für $y = x_0 = 0$.

Sonst $\frac{1}{z} = \frac{1}{iy} = \frac{-1}{y}i$.

Das Bild ist die imaginäre Achse ohne Null.

B) $x_0 \neq 0$

$$\overline{w} + w = 2x_0 w\overline{w} \iff w\overline{w} - \frac{1}{2x_0}\overline{w} - \frac{1}{2x_0}w = 0$$

Das Bild ist ein Kreis um $\frac{1}{2x_0}$ mit Radius $\frac{1}{2|x_0|}$.

(iii) $\mathrm{Im}\,(z) = y_0 \iff z - \overline{z} = 2iy_0$

A) $y_0 = 0$ $\frac{1}{z}$ nicht definiert für $x = y_0 = 0$.

Sonst $z^{-1} = \frac{1}{x}$. Das Bild ist die reelle Achse ohne Null.

B) $\mathrm{Im}\,(z) = y_0 \neq 0$

$\iff \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) = y_0$

$z - \overline{z} = 2iy_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{w} - \frac{1}{\overline{w}} - 2iy_0 = 0$

$w\overline{w} - \frac{1}{2iy_0}\overline{w} + \frac{1}{2iy_0}w = 0$

$\iff w\overline{w} + \frac{i}{2y_0}\overline{w} - \frac{i}{2y_0}w + \frac{1}{4y_0^2} = \frac{1}{4y_0^2}$

Das Bild ist ein Kreis um $\frac{-i}{2y_0}$ mit Radius $\frac{1}{|2y_0|}$.

b) Der Kreis $\left|z - \frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2}$ geht durch Null. Für $z = i$ erhält man $\frac{1}{z} = -i$. Für $z \to 0$ erhält man $\frac{1}{z} \to \infty$

Es gilt $z\overline{z} - \frac{i}{2}\overline{z} + \frac{i}{2}z = 0$ oder für $z \neq 0$

$$\begin{aligned} & 1 + \tfrac{i}{2}\overline{w} - \tfrac{i}{2}w = 0 \\ \iff\quad & 1 = \tfrac{i}{2}(w - \overline{w}) = -\mathrm{Im}\,(w) \end{aligned}$$

Das Bild ist eine zur reellen Achse parallele Gerade durch $-i$.

c) $z\overline{z} - c\overline{z} - \overline{c}z + c\overline{c} = R^2 \quad |c| \neq R$

$\frac{1}{w\overline{w}} - \frac{c}{\overline{w}} - \frac{\overline{c}}{w} + c\overline{c} = R^2$

$1 - cw - \overline{cw} + |c|^2 w\overline{w} = R^2 w\overline{w}$

$w\overline{w}\,(|c|^2 - R^2) - \overline{cw} - cw + 1 = 0$

$w\overline{w} - \frac{\overline{c}}{|c|^2 - R^2}\overline{w} - \frac{c}{|c|^2 - R^2}w + \frac{1}{|c|^2 - R^2} = 0$

$$w\overline{w} - \frac{\overline{c}}{|c|^2 - R^2}\overline{w} - \frac{c}{|c|^2 - R^2}w + \frac{|c|^2}{(|c|^2 - R^2)^2} = \frac{|c|^2}{(|c|^2 - R^2)^2} - \frac{1}{|c|^2 - R^2} = \frac{R^2}{|c|^2 - R^2}$$

Kreis mit Mittelpunkte $\frac{\overline{c}}{c\overline{c} - R^2}$ und Radius $r$, wobei

$$r^2 = \frac{c\overline{c}}{\left(|c|^2 - R^2\right)^2} - \frac{1}{|c|^2 - R^2} = \frac{R^2}{\left(|c|^2 - R^2\right)^2}$$

also

$$r = \frac{R}{|c|^2 - R^2}$$

Das Bild von $|z - 2| = 1$ ist demnach der Kreis mit

$$M = \frac{2}{4 - 1} = \frac{2}{3} \qquad \text{Radius } r = \frac{1}{3}$$

**Abgabetermine:** 20.4.21 - 23.4.21