Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2021**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. H. P. Kiani

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 1 (Präsenzaufgaben)

Aufgabe 1:

Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in Polarkoordinaten ($z = re^{i\phi}$) an und markieren Sie die zugehörigen Punkte in einer Skizze der komplexen Zahlenebene.

$$z_0 = 2, \quad z_1 = \sqrt{2}(1+i), \quad z_2 = 2i, \quad z_3 = \sqrt{2}(-1+i), \quad z_4 = -2, \text{ bzw. } z_k = i^k, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Lösungshinweise zu Aufgabe 1:

$$z_0 = 2 = 2e^{0i} \qquad r = \sqrt{2^2+0^2} = 2, \quad \cos(\phi) = 1, \sin\phi = 0 \Longrightarrow \phi = 0\,(+2k\pi)\,,$$

$$z_1 = \sqrt{2}(1+i) = 2e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad r = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2,$$

$$\cos(\phi) = \sin\phi = \tfrac{\sqrt{2}}{r} = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \phi = \frac{\pi}{4}\,(+2k\pi)\,,$$

$$z_2 = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \qquad r = \sqrt{0^2+2^2} = 2, \quad \sin(\phi) = 1, \cos\phi = 0 \Longrightarrow \phi = \tfrac{\pi}{2}\,(+2k\pi)\,,$$

$$z_3 = \sqrt{2}(-1+i) = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} \qquad r = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2,$$

$$\cos(\phi) = -\sin\phi = -\tfrac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \phi = \frac{3\pi}{4}\,(+2k\pi)\,,$$

$$z_4 = -2 = 2e^{i\pi} \qquad r = \sqrt{2^2+0^2} = 2, \quad \cos(\phi) = -1, \sin\phi = 0 \Longrightarrow \phi = \pi\,(+2k\pi)\,,$$

Skizze : Die Punkte liegen alle auf dem Kreis mit Radius 2 um Null, beginnend mit 2 im mathematischem positivem Sinn jeweils um $\pi/4$ weitergereht bis -2.

$$z_k = i^k = \begin{cases} 1 & k = 4l\,, \quad l \in \mathbb{Z} \\ i & k = 4l+1\,, \quad l \in \mathbb{Z} \\ -1 & k = 4l+2\,, \quad l \in \mathbb{Z} \\ -i & k = 4l+3\,, \quad l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Skizze : Die Punkte liegen alle auf dem Kreis mit Radius 1 um Null, beginnend mit 1 im mathematischem positivem Sinn jeweils um $\pi/4$ weitergereht bis -2.

Aufgabe 2:

Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in kartesischen Koordinaten ($z = x + iy$) an und skizzieren Sie die zugehörigen Punkte in der komplexen Zahlenebene.

$$z_k = e^{ik\pi} \quad k \in \mathbb{Z}, \qquad z = 3\,e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad \bar{z} = -2\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2 .$$

Lösungshinweise zu Aufgabe 2:

$z_k = e^{ik\pi} = (-1)^k$ denn $\sin(k\pi) = 0$ und $\cos(k\pi) = (-1)^k$

$$z = 3\,e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} \;=\; 3\,e^{i\frac{\pi}{3}+i\frac{\pi}{6}} \;=\; 3\,e^{i\frac{\pi}{2}} = 3(\cos(\tfrac{\pi}{2}) + i\sin(\tfrac{\pi}{2})) = 3i$$

$$\bar{z} = -2\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2 \;=\; -2e^{i\pi} = -2(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = 2 + 0 \cdot i \Longrightarrow z = 2 - 0 \cdot i = 2.$$

Tabelle für Aufgabe 1 und 2:

Winkel	Cosinus	Sinus
0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
π	-1	0
$\frac{3\pi}{2}$	0	-1

Aufgabe 3:

Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen der komplexen Ebene und beschreiben Sie die Mengen mit Worten

$$M_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2\},$$

$$M_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1 + 2i| \leq 1\},$$

$$M_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 1| = |z + 1 - i|\},$$

$$M_4 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2i| = |z - 1|\},$$

$$M_5 = \{z \in \mathbb{C} \mid z + \bar{z} = 1\}\,.$$

Lösungshinweise zu Aufgabe 3:

M_1: Kreisscheibe mit Radius 2 um 0 inklusive Rand

M_2: Kreisscheibe mit Radius 1 um $(1 - 2i)$ inklusive Rand

M_3: Abstand von $-1+i =$ Abstand von -1. Gerade Parallel zur reellen Achse, durch den Punkt $-1 + \frac{i}{2}$.

M_4: Abstand von $2i =$ Abstand von 1. Mittelsenkrechte der Verbindunsstrecke zwischen 2i und 1.

M_5: Die Gerade $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}$

Aufgabe 4:

Beschreiben Sie folgende Teilmengen der komplexen Zahlenebene, ähnlich wie in Aufgabe 3, mit Hilfe von Formeln.

M_6 : Streifen parallel zur imaginären Achse mit der Breite 4, symmetrisch zu $z_0 = 1 + i$, mit Rand.

M_7 : Kreisring um Null mit Innenradius 1 und Außenradius 3, ohne Rand.

M_8 : Kreisring (punktierte Kreisscheibe) um Null mit Innenradius 0 und Außenradius 3, ohne Rand.

M_9 : Sektor zwischen den Geraden mit $\mathrm{Re}\,(z) = \mathrm{Im}\,(z)$ und der Geraden $-\mathrm{Re}\,(z) = \mathrm{Im}\,(z)$ in der oberen Halbebene, ohne Rand.

Lösung:

$$M_6 = \{z \in \mathbb{C} \mid -1 \leq \mathrm{Re}\,(z) \leq 3\}$$

$$M_7 = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 3\},$$

$$M_8 = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 3\},$$

$$M_9 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = re^{i\phi},\, r > 0,\, \frac{\pi}{4} < \phi < \frac{3\pi}{4}\},$$

Bearbeitung: 06.04 - 09.04.2021