

Dr. Hanna Peywand Kiani

# **Hörsaalübung 7 Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften**

**Laurent-Reihen, Residuensatz,  
Partialbruchzerlegung, Kurvenintegrale  
uneigentliche reelle Integrale**

**02.07.2021**

Die ins Netz gestellten Kopien der Dateien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp- oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT! Eine Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

Falls nicht deutlich anders vermerkt gilt für die gesamte HÜ:  $\Gamma$  (das Bild einer geschlossene(n) stückweise  $C^1$  Kurve in  $D \subset \mathbb{C}$ .  $Uml(\Gamma, z_0) = 1$ .

**Wiederholung:** Wir hatten bereits:

**Cauchyscher Integralsatz (CIS) :**

$D$  **einfach** zusammenhängend und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph:

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0 .$$

Einfach zusammenhängend:  $D$  hat keine Löcher

**Homotopie:** Sind  $\Gamma$  und  $\tilde{\Gamma}$  zwei geschlossene, stetig und ohne Aufschneiden ineinander verformbare stückweise  $C^1$  Kurven, dann gilt

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\tilde{\Gamma}} f(z) dz$$

Sei  $C$  der positiv orientierte Kreis mit Radius 1 um einen Punkt  $z_0$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$\int_C (z - z_0)^n dz = \int_0^{2\pi} (z_0 + e^{it} - z_0)^n i e^{it} dt = \begin{cases} 2\pi i & n = -1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}$$

Homotopie: für jede einfach geschlossene (=doppelpunktfreie) Kurve  $\Gamma$ , die  $z_0$  einmal positiv umläuft gilt

$$\int_{\Gamma} (z - z_0)^n dz, = \begin{cases} 2\pi i & n = -1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}$$

Für jede geschlossene Kurve  $\Gamma$ , und jedes  $z_0 \notin \Gamma$  gilt

$$\int_{\Gamma} (z - z_0)^n dz, = \begin{cases} Uml(\Gamma, z_0) \cdot 2\pi i & n = -1 \\ 0 & n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \end{cases}$$

## Taylor-Reihen: Wie schon in $\mathbb{R}$

$$T(z; f, z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n .$$

Für jedes  $\Gamma$  geschlossen, mit  $Uml \Gamma(z_0) = 1$  gilt ( CIF)

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

Die Reihe konvergiert im größten Kreis um  $z_0$  in dem  $f$  analytisch ist **gegen  $f$** .

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \oint_{\Gamma} (z - z_0)^n dz = 0$$

## Beispiel a) Die Taylor-Reihe von

$$f(z) := \frac{5}{z-3}, \quad \text{mit } z_0 = 0$$

Für  $z = 3$  liegt eine Definitionslücke (isolierte Singularität) vor! Sonst ist  $f$  analytisch. Verwende geometrische Reihe: Ziel  $(z - z_0)$  Potenzen!

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{5}{z-3} = \frac{5}{(-3)\left(1 - \frac{z}{3}\right)} = -\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{3}} \\ &= -\frac{5}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{5}{3^{k+1}}\right) \cdot (z-0)^k \end{aligned}$$

Konvergenz liegt vor für  $\left|\frac{z}{3}\right| < 1$  also  $|z| < 3 = r$ .

Der Satz aus der Vorlesung besagt, dass die Reihe in dieser Kreisscheibe nicht gegen irgendwas, sondern gegen  $f$  konvergiert.

Und was, wenn ich für  $|z| > 3$  auch gerne eine Reihe aus  $(z - z_0)$  Potenzen hätte?

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{5}{z-3} = \frac{5}{z \left(1 - \frac{3}{z}\right)} \\ &= \frac{5}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{z}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(5 \cdot 3^k \frac{1}{z^{k+1}}\right) = \sum_{l=1}^{\infty} 5 \cdot 3^{l-1} z^{-l} \end{aligned}$$

Allgemeiner:

# Laurent-Reihen

Seien:  $G \subset \mathbb{C}$ ,  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph in  $G$ .

$$D := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\} \subset G$$

Dann kann  $f$  in  $D$  in eine Laurent-Reihe entwickelt werden:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

wobei  $\Gamma$ : wie oben

- Die Reihe konvergiert im größten Ringgebiet  $\subset D$  gegen  $f$ .
- Die Reihe ist bei vorgegebenem Ring eindeutig.

- Ziel ist NICHT die Koeffizienten über die Integrale zu rechnen sondern umgekehrt.

Die Koeff' berechnet man z.B. mit

- bekannten Reihen (Beispiel d,e)
- geometrische Reihe (Beispiel a oben, Beispiel b, c, g unten)
- Ableitungen, Integrale

**Beispiel b:**  $f(z) = \frac{5}{z - 3}$

Gesucht: Entwicklung um  $z_0 = 1$ .

Definitionslücke (Isolierte Singularität) in  $z = 3$ .

Funktion ist analytisch in jedem der Ringe:

$$R_1 : 0 \leq |z - 1| < |3 - 1|$$

$$R_2 : |3 - 1| < |z - 1| < \infty$$



$z_0 = 1$  : Wir wollen in der Reihe Potenzen von  $(z - 1)$

$$\text{Umschreiben der Funktion: } f(z) = \frac{5}{z-3} = \frac{5}{(z-1)+1-3} = \frac{5}{(z-1)-2}$$

Für  $z \in R_1$  gilt:  $|z - 1| < 2$

$$\begin{aligned} \frac{5}{z-3} &= \frac{5}{(z-1)-2} = \frac{5}{-2 \left(1 - \frac{z-1}{2}\right)} \\ &= -\frac{5}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-5}{2^{k+1}} (z-1)^k . \end{aligned}$$

In  $R_1$  ist also: Laurent Reihe = Taylor Reihe, d.h.  $a_k = 0 \quad \forall k < 0$ .

Für  $z \in R_2$  gilt  $|z - 1| > 2$ . Damit wir eine konvergente geometr. Reihe erhalten teilen wir hier im 1. Schritt durch  $(z - z_0)$ .

$$\begin{aligned} \frac{5}{(z-1)-2} &= \frac{5}{(z-1)} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{z-1}\right)} \\ &= \frac{5}{z-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z-1}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} 5 \cdot \frac{2^k}{(z-1)^{k+1}} \\ &= \sum_{l=-1}^{-\infty} 5 \cdot 2^{-l-1} \cdot (z-1)^l. \end{aligned}$$

Erste Reihe konvergent im ersten Ring gegen  $f$

Zweite Reihe konvergent im zweiten Ring gegen  $f$

Keine Darstellung für  $|z - 1| = 2$

# Isolierte Singularitäten

Häufig sind Funktionen nur in einzelnen Punkten nicht analytisch.

Beispiel: Potential/elektrisches Feld einer Ladung  $Q$  im Punkt  $z_0$ :

$$\Phi(z) = \frac{k \cdot Q}{\|z - z_0\|}, \quad E(z) = \text{grad}\Phi(z) = \frac{k \cdot Q}{\|z - z_0\|^3} (z - z_0)$$

Verhalten der Funktionen in der Nähe solcher Punkte?

$z_0 \in \mathbb{C}$  heißt **isolierte Singularität** der analytischen Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ , wenn eine punktierte Umgebung von  $z_0$  zu  $G$  gehört, nicht aber  $z_0$  selbst:

$$0 < |z - z_0| < r \subset G, \quad z_0 \notin G, \quad r > 0.$$

**Beispiele:**

- 0 und 1 sind isolierte Singularitäten der Funktion  $f(z) := \frac{z - 1}{z^2(z - 1)}$ .
- -1 ist keine isolierte Singularität von  $f(z) := \ln(z)$ .

**Kleiner Test:** Wie viele verschiedene Laurent-Reihen hat  $f(z) := \frac{z-1}{z^2(z-1)}$  mit Entwicklungspunkt  $z_0 = -1$ ?

# Klassifikation

Sei  $z_0$  isolierte Singularität von  $f$ . Dann kann  $f$  in  $0 < |z - z_0| < r$  in eine Laurent-Reihe entwickelt werden:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

- $z_0$  heißt **hebbare Singularität**  $\iff a_k = 0 \quad \forall k < 0$ .
- $z_0$  heißt **Pol m-ter Ordnung** mit  $m \in \mathbb{N}$   $\iff$   
 $a_{-m} \neq 0, \quad a_k = 0 \quad \forall k < -m$ .

Die Laurent-Reihe hat also die Form

$$a_{-m} \frac{1}{(z - z_0)^m} + a_{-m+1} \frac{1}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots + a_{-1} \frac{1}{(z - z_0)^1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

- $z_0$  heißt **wesentliche Singularität**  $\iff a_k \neq 0$  für unendlich viele  $k < 0$ .

**Beispiel c)**  $f(z) := \frac{1}{z(z^2 + 4)}$

Die Funktion hat in den Nennernullstellen  $0, 2i, -2i$  isolierte Singularitäten.

Zur Klassifikation gibt es (mindestens) drei Möglichkeiten.

**1. Möglichkeit:** Reihe berechnen. Für  $z_0 = 0$  und  $0 < |z| < 2$  gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z^2 + 4} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{4\left(1 + \frac{z^2}{4}\right)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{4\left(1 - \left(-\frac{z^2}{4}\right)\right)} \\ &= \frac{1}{4z} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k} z^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^{k+1}} z^{2k-1} = \frac{1}{4z} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^{k+1}} z^{2k-1}}_{\text{positive Potenzen}} \end{aligned}$$

$z_0 = 0$  ist also Pol erster Ordnung.

## 2. Möglichkeit: Reihe wird nicht berechnet

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \underbrace{\frac{1}{z^2 + 4}}_{g(z)}$$

$g(z)$  ist holomorph (analytisch) nahe  $z_0 = 0$  und kann in eine Taylor-Reihe

$$g(z) = g(z_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

entwickelt werden. Damit ist  $f$  nahe  $z_0$  gegeben durch

$$f(z) = \frac{g(0)}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} (z - 0)^{k-1}$$

Wegen  $g(0) = 1/4 \neq 0$  ist die niedrigste in der Reihe vorkommende Potenz von  $(z - 0)$  also -1.

**ACHTUNG:** Für  $|z| > 2$  erhält man für die gleiche Funktion  $f$

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z^2 + 4} = \frac{1}{z} \cdot \left( \frac{1}{z^2 \left(1 + \frac{4}{z^2}\right)} \right) = \dots = \sum_{k=-\infty}^{-1} (-4)^{-k-1} z^{2k-1}$$

also unendlich viele Terme mit negativen Potenzen!

Frage: Liegt also doch eine wesentliche Singularität in  $z_0 = 0$  vor?

**Beispiel d)**  $f(z) := \frac{\sin(z)}{z^4} =$

hat  $f$  einen Pol 4. Ordnung in  $z_0 = 0$ ?



**Beispiel e)**  $f(z) := e^{\frac{1}{z+3}}$  hat eine isolierte Singularität in  $z_0 = -3$ .

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \left( \frac{1}{z+3} \right)^k =$$

In  $z_0 = -3$  liegt eine wesentliche Singularität vor.

**Beispiel f)**  $f(z) := \frac{z + 2i}{z^2 + 4}$

**ACHTUNG: hebbar  $\neq$  rauskürzbar!**

Beispiel:  $\frac{\cos(z) - 1}{z^2}$

## Residuen und Hauptteile

Ist  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  die im Ring  $0 < |z - z_0| < R$  konvergente Laurent-Reihe zu  $f$ , so heißt

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) dz =: \operatorname{Res} f(z_0)$$

das **Residuum von  $f$  an der Stelle  $z_0$** .

Schreibweise:  $\operatorname{Res} f(z_0) = \operatorname{Res} f(z) |_{z=z_0} = \operatorname{Res}(f; z_0)$ .

und 
$$h_f(z; z_0) = \sum_{k=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n$$

der **Hauptteil** von  $f$  bei Entwicklung um  $z_0$  / der zu  $z_0$  gehörige **Hauptteil** von  $f$ .

**Ist  $f$  analytisch in einer Umgebung von  $z_0$ , so ist  $h_f(z; z_0) = 0$**

# Komplexe Partialbruchzerlegung:

Eine rationale Funktion, die im  $\infty$  verschwindet,  
ist die Summe ihrer Hauptteile!

Das heißt: Mit  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ ,

$p$  und  $q$  Polynome mit  $\text{grad}(p) < \text{grad}(q)$

$z_1, \dots, z_k$  die Nullstellen von  $q$ ,

bestimmt man für jedes  $z_l, l = 1, \dots, k$  den Hauptteil und erhält mit

$$f(z) = h_f(z; z_1) + h_f(z; z_2) + \dots + h_f(z; z_k)$$

**die komplexe Partialbruchzerlegung (PBZ) von  $f$ .**

Für Pole  $z^*$  erster Ordnung:  $h_f(z; z^*) = a_{-1} (z - z^*)^{-1} = \frac{\text{Res}f(z^*)}{z - z^*}$ .

## Rechenregeln für Residuen :

- **Regel 1)**  $z_0$  einfacher Pol :

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

- **Regel 2)**  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ ,  $p$  und  $q$  holomorph in einer Umgebung von  $z_0$ ,

$z_0$  einfache Nullstelle von  $q$ ,  $p(z_0) \neq 0 \implies$

$z_0$  ist Pol erster Ordnung von  $f$  mit  $\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$

- **Regel 3 )  $z_0$  Pol  $m$ -ter Ordnung)**

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} ((z - z_0)^m f(z))^{(m-1)}$$

**Beispiel g:**  $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)} = \frac{1}{(z-1)^2} \frac{1}{z-3}$

Residuen und PBZ gesucht!

$$\text{Res}f(3) = \lim_{z \rightarrow 3} (z - z_0)f(z) = \lim_{z \rightarrow 3} (z - 3) \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}$$

$$\text{Res}f(1) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow 1} ((z-1)^m f(z))^{(m-1)} \quad \text{mit } m = 2$$

$$\text{Res}f(1) = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 1} \left( (z-1)^2 \frac{1}{(z-1)^2(z-3)} \right)'$$

PBZ:  $f(z) = h_f(z; 3) + h_f(z; 1)$

$$h_f(z; 3) = \frac{\text{Res}f(3)}{z-3}$$

Hauptteil zu  $z = 1$ :

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2} \underbrace{\frac{1}{z-3}}_{g(z)}$$
$$= \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \left( g(z_0) + g'(z_0)(z-z_0) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k \right)$$

**Beispiel h:**  $f(z) = \frac{1}{z^2 + 6z + 8}, \quad z_0 = 0.$

Gesucht sei diejenige Laurent-Reihe, die für  $\hat{z} = 3$  gegen  $f(\hat{z})$  konvergiert.

1. Schritt: Nullstellen vom Nenner bestimmen:  $\frac{1}{z^2 + 6z + 8} = \frac{1}{(z + 2)(z + 4)}$

$f$  ist nicht definiert (hat isolierte Singularitäten) in  $z = -2$  und  $z = -4$

$\implies$  Es gibt drei Laurent Reihen

Gesucht die Reihe, die für  $\hat{z} = 3$  gegen  $f(\hat{z})$  konvergiert

Wir betrachten die Funktion also auf dem Ring

$R_2 : 2 < |z| < 4.$

2.Schritt: Evtl. Polynomdivision, Ausklammern etc. und PBZ

$$f(z) = h_f(z; -2) + h_f(z; -4) =$$



Klassifikation der Singularitäten:  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{1}{z^2 + 6z + 8}$

**Residuen: Für einen einfachen Pol gilt**

**Regel 1)**  $Res f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$

**Regel 2)**  $Res f(z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$

**PBZ:**

### 3. Schritt: Entwicklungen der einzelnen Terme im richtigen Ring!

$$|z| > 2 : \frac{1}{z+2} =$$

$$|z| < 4 : \frac{1}{z+4}$$

Damit erhalten wir die folgende Entwicklung der Funktion  $f$  im

Ring  $2 < |z| < 4$ :

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} \left( (-1)^{-k-1} \cdot 2^{-k-2} z^k \right) - \sum_{k=0}^{\infty} \left( (-1)^k \frac{1}{2 \cdot 4^{k+1}} z^k \right)$$

## Integralberechnung über Residuen

**Beispiel i:**  $z_0 = 0$ ,  $\Gamma$  wie oben. Die Funktion

$f(z) = \frac{\cos(z) - 1 + z^2}{z^5}$  hat eine isolierte Singularität in  $z_0 = 0$ . Es gilt

$$a_{-1} = \operatorname{Res}f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz$$

Andererseits

$$f(z) = \frac{-1 + z^2 + 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} \pm \dots}{z^5} = \frac{1}{2!z^3} + \frac{1}{4!z} - \frac{z}{6!} + \frac{z^3}{8!} \mp \dots$$

Also gilt

$$\oint_{\Gamma} \frac{-1 - z^2 + \cos(z)}{z^5} dz = 2\pi i \frac{1}{4!}.$$

Man kann also das Integral mit Hilfe von  $a_{-1}$  berechnen. Was aber tun wenn die Kurve mehrere Singularitäten umläuft?

**Residuensatz** : Seien

$D \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet

$f : D \setminus \{z_1, \dots, z_m\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph

$\Gamma$  geschlossener Weg in  $D \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$ ,

Dann gilt

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{Uml}(\Gamma, z_k) \text{Res}(f; z_k)$$

Insbesondere falls  $\Gamma$  einfach geschlossen, positiv orientiert und  $z_1, \dots, z_m$  innerhalb von  $\Gamma$ , d.h.  $\text{Uml}(\Gamma, z_k) = 1$

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{Res} f(z_k)$$

**Im Beispiel h:** hatten wir  $f(z) = \frac{1}{z^2 + 6z + 8}$   
mit einfachen Pole in  $z = -2$  und  $z = -4$  mit den Residuen:

$$\operatorname{Res}f(-2) = \quad , \operatorname{Res}f(-4) =$$

### Zu berechnen sind die Integrale

(Skizze der Kurven vor Ort)

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz = -2\pi i \operatorname{Res}f(-2)$$

$$\int_{\Gamma_2} f(z)dz = +2\pi i [\operatorname{Res}f(-2) + \operatorname{Res}f(-4)]$$

$$\int_{\Gamma_3} f(z)dz = -2\pi i \operatorname{Res}f(-2) + 2\pi i \operatorname{Res}f(-4)$$

Noch schnell ein Satz vor den letzten Beispielen:

## Uneigentliche Integrale

**Satz:** Sei  $H := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) \geq 0\}$

$D$  Gebiet mit  $H \subset D$ .

$f$  holomorph in  $D \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$

$\{z_1, \dots, z_n\} \subset H \setminus \mathbb{R}$  (d.h. keine Singularitäten in  $\mathbb{R}$ ),

$\lim_{z \rightarrow \infty} z \cdot f(z) = 0$  glm. in  $H$ .

(z.B.  $f(z) = p(z)/q(z)$  mit  $\text{grad } q \geq \text{grad } p + 2$ )

Dann gilt 
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1, \text{Im}(z_k) > 0}^n \text{Res} f(z_k)$$

**Beispiel 1)**  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-2)(x^2+1)} dx$

Satz nicht anwendbar! Singularität in  $z = 2 \in \mathbb{R}$ .

**Beispiel 2)**  $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+4)(x^2+1)} dx$

$$f(z) = \frac{1}{(z+2i)(z-2i)(z+i)(z-i)}$$

Singularitäten in der oberen Halbebene :  $z_1 = i, z_2 = 2i$

$$I = 2\pi i (Resf(i) + Resf(2i))$$

$$= 2\pi i \left( \left. \frac{1}{(z+2i)(z-2i)(z+i)} \right|_{z=i} + \left. \frac{1}{(z+2i)(z-i)(z+i)} \right|_{z=2i} \right)$$