

Dr. Hanna Peywand Kiani

Hörsaalübung 6 Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Kurvenintegrale, Cauchyscher Integralsatz

Cauchysche Integralformeln

18.06.2021

Die ins Netz gestellten Kopien der Folien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp- oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT! Eine Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

Für die Durchführung und/oder Korrektur von Übungen zu Mathematik III im Wintersemester 2021/22 suchen wir noch studentische Tutoren.

Bewerbungen bitte per email an Kai Rothe (rothe@math.uni-hamburg.de) richten mit Namen, Matrikelnummer, Studiengang und bisherigen Klausurergebnissen in Mathematik I-III.

Komplexe Kurvenintegrale

Gegeben:

Gebiet G , $D \subset G \subset \mathbb{C}$,

Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig,

Eine stückweise C^1 - Kurve: $c : [a, b] \rightarrow D$.

Falls für beliebige Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, $z_k = c(t_k)$ der Grenzwert von

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(z_k)(z_k - z_{k-1})$$

existiert definiere: das komplexe Kurvenintegral von f längs c als

$$\int_c f(z) dz := \int_a^b f(c(t)) \cdot \dot{c}(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(z_k)(z_k - z_{k-1})$$

Mit $-c$ bezeichnet man die entgegengesetzt durchlaufene Kurve. Es gilt

$$\int_{-c} f(z)dz = - \int_c f(z)dz$$

Mit $-c$ bezeichnen wir also NICHT $\hat{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, \hat{c}(t) = -c(t)$.

Beispiel 1) $f(z) := z^{1/2}$ längs Einheitskreis von $-i$ nach i , positiv orientiert

$$c(t) = \quad t \in \quad \dot{c}(t) =$$

$$f(c(t)) =$$

$$\int_c f(z)dz = \int_a^b f(c(t)) \cdot \dot{c}(t)dt =$$

Andersherum durchlaufen:

$$\tilde{c} = -c, \quad \tilde{c}(t) = e^{-it}, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \dot{\tilde{c}}(t) = -ie^{-it}$$

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{c}} f(z) dz &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{-it}{2}} \cdot (-ie^{-it}) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -i e^{-i\frac{3}{2}t} dt = \\ &= \left[\frac{e^{-i\frac{3}{2}t}}{\frac{3}{2}} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} [e^{-i\frac{3\pi}{4}} - e^{i\frac{3\pi}{4}}] = -\frac{2\sqrt{2}}{3} i \end{aligned}$$

$$\hat{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \hat{c}(t) = -c(t) = -e^{it} \quad \dot{\hat{c}}(t) = -ie^{it} \quad f(\hat{c}(t)) = i \cdot e^{\frac{it}{2}}.$$

$$\begin{aligned} \int_{\hat{c}} f(z) dz &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ie^{\frac{it}{2}} \cdot (-ie^{it}) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{3}{2}t} dt = \\ &= \left[\frac{e^{i\frac{3}{2}t}}{i\frac{3}{2}} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2i}{3} [e^{i\frac{3\pi}{4}} - e^{-i\frac{3\pi}{4}}] = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

Beispiel 2) Wegabhängigkeit

$f(z) = |z|$, von $z_0 = -1 - i$ bis $z_1 = 1 + i$

i) längs der geradlinigen Verbindung

$c[-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $c(t) := (1 + i)t$, $t \in [-1, 1]$.

$$\dot{c}(t) = 1 + i, \quad f(c(t)) = |t + it| = \sqrt{t^2 + t^2}$$

$$\begin{aligned} \int_c f(z) dz &:= \int_{-1}^1 f((1 + i)t) \cdot (1 + i) dt \\ &= \int_{-1}^1 \sqrt{2t^2} \cdot (1 + i) dt = \sqrt{2} (1 + i) \int_{-1}^1 \sqrt{t^2} dt \\ &= \sqrt{2} (1 + i) \int_{-1}^1 |t| dt = 2\sqrt{2} (1 + i) \int_0^1 t dt = \sqrt{2} (1 + i) \end{aligned}$$

ii) Längs des Kreises mit Radius $\sqrt{2}$ um Null, positiv orientiert

$$f(z) = |z|, \tilde{c} : \left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow \mathbb{C}, \tilde{c}(t) := \sqrt{2}e^{it}$$

Beachte: f , Anfangspunkt und Endpunkt sind wie oben!

$$\dot{\tilde{c}}(t) = \quad f(\tilde{c}(t)) =$$

$$\int_{\tilde{c}} f(z) dz = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(\tilde{c}(t)) \cdot \dot{\tilde{c}}(t) dt =$$

$$= 2 \left[e^{it} \right]_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 2 \left[e^{\frac{i\pi}{4}} - e^{-\frac{i3\pi}{4}} \right]$$

$$= 2 \left[\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] = 2\sqrt{2} (1 + i)$$

Das komplexe Kurvenintegral (ist wie schon das reelle) i. A. wegabhängig.

Hauptsatz, Stammfunktionen (Seite 100-103 Skript)

Sei $D(f)$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet G und f analytisch in G .
 c geschlossene stkw. C^1 Kurve in G . Dann gilt der Cauchysche Integralsatz

$$\oint_c f(z)dz = 0 \quad (\text{CIS})$$

Folgerung: $\int_{z_0}^z f(z)dz$ ist wegunabhängig!

\implies Es gibt Stammfunktion

$$F_{z_0}(z) = \int_{z_0}^z f(\hat{z})d\hat{z}$$

mit $F'(z) = f(z)$ und $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$.

Und was heißt **einfach zusammenhängend**?

G hat keine Löcher

Jeder geschlossene Weg läßt sich in G stetig auf einen Punkt zusammenziehen
(ist **Nullhomotop**)

CIS gilt auch, wenn G nicht einfach zusammenhängend ist,
aber c in G nullhomotop ist.

Beweisskizze CIS: Mit $f = u + iv$ und $c(t) = x(t) + iy(t)$ gilt

$$\oint_C f(z)dz = \int_a^b (u + iv) \cdot (\dot{x} + i\dot{y}) dt$$

Beispiel 3: $f(z) := \frac{z^3 - 2z^2 + z - 2}{z^2 - 2z}$ längs Einheitskreis

$z = 2$ liegt nicht im Einheitskreis und nicht auf dem Integrationsweg. Also gilt

$$f(z) =$$

$$c(t) = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi], \quad \dot{c}(t) = i e^{it}$$

$$\oint_c f(z) dz = \oint_c z + \frac{1}{z} dz = \oint_c z dz + \oint_c \frac{1}{z} dz$$

$$= 0 + \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} \cdot i e^{it} dt$$

$$= i \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi i.$$

Beispiel 4: Berechnen Sie $\int_{c_1} \frac{\ln(z)}{z} dz$

$c_1 :=$ mathematisch positiv durchlaufener Halbkreis $|z| = 1$, $\operatorname{Re}(z) \geq 0$

1. Möglichkeit : direkt

$$\int_{c_1} \frac{\ln(z)}{z} dz, = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\ln(e^{it})}{e^{it}} ie^{it} dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} it \cdot i dt =$$

2. Möglichkeit : Stammfunktion

$$F'(z) := \left(\frac{(\ln(z))^2}{2} \right)' = \frac{\ln(z)}{z} = f(z).$$

f : nicht analytisch in \mathbb{C} , auch nicht um den ganzen Einheitskreis herum, aber analytisch in einem zusammenhängenden Gebiet, welches die Kurve c_1 enthält,

daher gilt

$$\begin{aligned} \int_{c_1} \frac{\ln(z)}{z} dz &= F(c_1(\pi/2)) - F(c_1(-\pi/2)) = \frac{(\ln(e^{i\pi/2}))^2}{2} - \frac{(\ln(e^{-i\pi/2}))^2}{2} \\ &= \frac{(i\pi/2)^2}{2} - \frac{(-i\pi/2)^2}{2} = 0. \end{aligned}$$

Homotopie: Zwei geschlossene, ein mal mathematisch positiv durchlaufene Kurven C und \tilde{C} in einem Gebiet G heißen homotop, wenn sie in G stetig und ohne sie aufschneiden zu müssen ineinander verformbar sind.

Seite 107 Vorlesung:

Sei D zweifach zusammenhängend (ein Loch).

Sind C und \tilde{C} zwei geschlossene, in $D \setminus \text{Loch}$ (also wo f analytisch ist) homotope stückweise C^1 Kurven, dann gilt

$$\int_C f(z) dz = \int_{\tilde{C}} f(z) dz$$

Die wohl wichtigsten Integrale für uns:

Sei C der positiv orientierte Kreis mit Radius 1 um einen Punkt z_0 , $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \int_C (z - z_0)^n dz, &= \int_0^{2\pi} (z_0 + e^{it} - z_0)^n i e^{it} dt \\ &= \int_0^{2\pi} i e^{i(n+1)t} dt = \begin{cases} 2\pi i & n = -1 \\ \left[\frac{e^{i(n+1)t}}{n+1} \right]_0^{2\pi} = 0 & n \neq -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Homotopie: für jede einfach geschlossene (=doppelpunktfreie) Kurve Γ , die z_0 einmal positiv umläuft gilt

$$\int_{\Gamma} (z - z_0)^n dz, = \begin{cases} 2\pi i & n = -1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}$$

Beispiel: Das Integral von $f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-2a)}$, $a \neq 0$ über einer einmal durchlaufenen ∞ -Schleife kann nur die Werte $0, \pm \frac{2\pi i}{a}, \pm \frac{4\pi i}{a}$ annehmen.

Begründung:

$$\text{PBZ: } f(z) = \frac{\alpha}{z-2a} + \frac{\beta}{z-a}$$

$$\alpha(z-a) + \beta(z-2a) = 1 \implies \alpha = -\beta = \frac{1}{a}$$

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_C \frac{\frac{1}{a}}{z-2a} - \frac{\frac{1}{a}}{z-a} \\ &= \frac{1}{a} \left(\int_C \frac{1}{z-2a} dz - \int_C \frac{1}{z-a} dz \right) \\ &= \frac{1}{a} \left(\int_{C_1} \frac{1}{z-2a} dz + \int_{C_2} \frac{1}{z-2a} dz - \int_{C_1} \frac{1}{z-a} dz - \int_{C_2} \frac{1}{z-a} dz \right) \end{aligned}$$

Cauchyschen Integralformeln (CIF):

Sei f analytisch in einfach zusammenhängendem D

$C : [a, b] \rightarrow D \setminus \{z_0\}$ geschlossen, z_0 homotop, stkw. C^1 ,

$\text{Uml}(C, z_0) = 1$: d.h. z_0 wird einmal in math. positiver Richtung umlaufen.

Dann gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (\text{CIF I})$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (\text{CIF II})$$

Falls $k = \text{Uml}(C, z_0) \neq 1$ erhält man auf der linken Seite noch den Faktor $k \in \mathbb{Z}$.

Achtung: Integrand nicht mehr analytisch im inneren von C , aber f !

Beweis: (Seiten 109/110 Skript)

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{K_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Folgerungen:

Mittelwerteigenschaft: f analytisch in G und stetig, $z_0 \in G$, $K_r(\overline{z_0}) \in G$, dann gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})$$

Maximumprinzip: f analytisch in G und stetig in \overline{G} und nicht konstant, dann nimmt $|f|$ nur auf dem Rand sein Maximum an.

Anwendungen/Beispiele

Berechnung von Integralen bei Nennernullstellen

Folgende Kurvenintegrale sollen berechnet werden . Die angegebenen Kurven sollen, wenn nicht anders vermerkt, einmal in mathematisch positiver Richtung durchlaufen werden.

$$\text{a) } \int_{C_k} \frac{1}{z^2 - 2z} dz \quad k = 1, 2 \quad C_1 : |z| = 1, \quad C_2 : |z - 5| = 1,$$

$$\int_{C_1} \frac{1}{z(z-2)} dz = \int_{C_1} \frac{1}{z} dz =$$

$$\int_{C_2} \frac{1}{z^2 - 2z} dz =$$

$$\text{b) } I_C := \int_C \frac{e^z}{1 + 4z^2} dz \quad C : |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| = 1,$$

1. Möglichkeit : PBZ

$$\begin{aligned} I_C &:= \int_C e^z \left(\frac{a}{2z+i} + \frac{b}{2z-i} \right) dz \\ &= \int_C e^z \left(\frac{i/2}{2z+i} + \frac{-i/2}{2z-i} \right) dz \\ &= \frac{i}{2} \left(\int_C \frac{e^z}{2z+i} dz - \int_C \frac{e^z}{2z-i} dz \right) \end{aligned}$$

ACHTUNG:

$$I_C \neq = \frac{i}{2} \left(2\pi i e^{-\frac{i}{2}} - 2\pi i e^{\frac{i}{2}} \right) = -\pi i (-2 \sin(1/2))$$

Warum?

Richtig wäre?

2. Möglichkeit : Kurve zerlegen

$$\begin{aligned} I_C &:= \int_C \frac{e^z}{1+4z^2} dz = \int_C \frac{e^z}{4(z+\frac{i}{2})(z-\frac{i}{2})} dz \\ &= \int_{C_1} \frac{e^z}{4(z+\frac{i}{2})(z-\frac{i}{2})} dz + \int_{C_2} \frac{e^z}{4(z+\frac{i}{2})(z-\frac{i}{2})} dz \\ &= \int_{C_1} \frac{e^z}{4(z+\frac{i}{2})} \frac{1}{(z-\frac{i}{2})} dz + \int_{C_2} \frac{e^z}{4(z-\frac{i}{2})} \frac{1}{(z+\frac{i}{2})} dz \\ &= 2\pi i \left(\left. \frac{e^z}{4(z+\frac{i}{2})} \right|_{z=\frac{i}{2}} + \left. \frac{e^z}{4(z-\frac{i}{2})} \right|_{z=-\frac{i}{2}} \right) \\ &= 2\pi i \left(\frac{e^{\frac{i}{2}}}{4i} + \frac{e^{-\frac{i}{2}}}{-4i} \right) = \pi i \sin(1/2) \end{aligned}$$

Merke:

Wenn **nur eine einfache Nennernullstelle** umlaufen wird, spalte zugehörige(n) Linearfaktor(en) im Nenner ab, versuche den Rest nach oben in den Zähler zu ziehen und CIF I zu verwenden.

Mehrere Definitionslücken: Zerlege Kurve oder Bruch!

Mehrfache Nullstellenn im Nenner: CIF II

$C : [a, b] \rightarrow D \setminus \{z_0\}$ geschlossen, z_0 homotop, stkw. C^1

$$\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \text{Uml}(C, z_0) \cdot 2\pi i \cdot \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Beispiel: $C_k = \{z \in \mathbb{C} : z = re^{-i\phi}, r = k, \phi \in [0, 2k\pi], k = 1, 3, 4, 5\}$.

$$\int_{C_1} \frac{e^{-z}}{(z-3)^{n+1}} dz =$$

$$\int_{C_3} \frac{e^{-z}}{(z-3)^{n+1}} dz =$$

$$\int_{C_4} \frac{e^{-z}}{(z-3)^{n+1}} dz = \text{Uml}(C_4, 3) \cdot 2\pi i \cdot \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ $a_k \in \mathbb{C}$, $z_0 =$ Entwicklungspunkt

mit $r := \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$ (falls dies existiert)

bzw. $r := \left(\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \right)^{-1}$

$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Konvergenz f\u00fcr} & |z - z_0| < r \\ \text{Divergenz f\u00fcr} & |z - z_0| > r \\ \text{keine Aussage f\u00fcr} & |z - z_0| = r \end{array} \right.$

Taylor-Reihen

Wie schon in \mathbb{R} gilt

$$T(z; f, z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n .$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

wobei C den Punkt z_0 ein Mal positiv umläuft.

Die Reihe konvergiert in der größten offenen Kreisscheibe um z_0 , in der f analytisch ist, **gegen f** .

Beispiel a) Taylor-Reihe der Funktion

$$f : z \rightarrow \frac{2}{3 + 4z}, \quad \text{mit } z_0 = 1.$$

Taylor-Reihe: Verwende geometrische Reihe mit Ziel $(z - z_0)$ Potenzen!

Geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$

konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$.

Reihe berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3 + 4z} &= \frac{2}{3 + 4(z - 1) + 4} = 2 \cdot \frac{1}{7 + 4(z - 1)} \\ &= \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4}{7}(z - 1)} = \frac{2}{7} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{4}{7}(z - 1) \right)^k \end{aligned}$$

konvergent für $\left| \frac{4}{7}(z - 1) \right| < 1$. Also $|z - 1| < \frac{7}{4} = r$

Radius berechnen ohne Reihe zu kennen:

Reihe konvergiert im größten kreis um z_0 , in dem f analytisch ist, gegen f (nicht gegen irgendwas!)

$$f : z \rightarrow \frac{2}{3 + 4z}, \quad \text{mit } z_0 = 1.$$

Nenner Nullstelle: $3 + 4z = 0 \implies z = \frac{-3}{4}$

Konvergenz liegt vor für $|z - z_0| < |z_0 - \frac{-3}{4}| = \frac{7}{4}$.

Beispiel b)

$$g(z) := \frac{1}{\ln(3 - z)} \quad z_0 = 0$$

$$\tilde{g}(z) := \frac{1}{\ln(3 + 2i - z)} \quad z_0 = 3$$

Beispiel c) Die Taylor-Reihe der Funktion $f(z) := \frac{2}{e^{4z} + 4}$ mit $z_0 = 0$ konvergiert in der größten Kreisscheibe um Null, in dem

$e^{4z} \neq -4$ gilt, gegen f .

$$e^{4z} = e^{4x} \cdot e^{4yi} = -4 = 4e^{i\pi} \iff$$

$$|e^{4z}| = |e^{4x}| = e^{4x} \stackrel{!}{=} |-4| \implies 4x = \ln(4) \implies x = \frac{\ln(4)}{4}$$

und

$$e^{4yi} \stackrel{!}{=} e^{i\pi} \implies 4y = \pi + 2k\pi \implies y = \frac{(2k+1)\pi}{4}$$

Konvergenzradius $r =$

Man muss also die Reihen nicht berechnen, um die Konvergenzradien zu erhalten!