Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg SoSe 2021

Dr. Hanna Peywand Kiani

Hörsaalübung 5 Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Differenzierbarkeit, konforme Abbildungen,

04.06.2021

Differenzierbarkeit

Für die gesamte HÜ: Wenn nicht ausdrücklich anders erklärt:

G: Gebiet in $\mathbb{C}$, also offene, zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C}$.

$i^2 = -1, \quad z = x + iy = re^{i\phi}, \qquad x, y, r, \phi \in \mathbb{R}$

$f : G \to \mathbb{C},\ f : z \mapsto f(z) = w = u + iv = \rho e^{i\alpha}, \qquad u, v, \rho, \alpha \in \mathbb{R}.$

Also $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Oder $f(z) = f(re^{i\phi}) = u(r, \phi) + iv(r, \phi)$.

Komplexe Differenzierbarkeit: f heißt in z_0 komplex diff.bar, falls

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$$

existiert.

analytisch/ holomorph/ regulär in G : in ganz G komplex differenzierbar.

Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen (CR-DGL'n) :

Seien u und v in einer Umgebung von z_0 partiell diffbar nach x und y. Dann:

f in z_0 kompl. diffbar $\iff$ in z_0 gelten die (CR-DGL'n)

$$\boxed{u_x = v_y\,, \quad v_x = -u_y}$$

Dann gilt

$$\boxed{f'(z_0) = u_x(z_0) + i \cdot v_x(z_0)}$$

Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen in Polarkoordinaten

$$\boxed{u_r = \frac{1}{r} v_\phi\,, \qquad v_r = -\frac{1}{r} u_\phi}$$

Zur Erinnerung: Differenzierbarkeit= hinreichend gute Approximierbarkeit durch affin lineare Funktionen (= Drehstreckungen + Verschiebung)

In $\mathbb{C}$: $f(z) \;=\; u(x,y) \;+\; i\,v(x,y)$

$$\text{Im } \mathbb{R}^2: \qquad \tilde{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} \Longrightarrow J\tilde{f}(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

Drehstreckung + Verschiebung im $\mathbb{R}^2$:

$$\boldsymbol{g}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;=\; \boldsymbol{A}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

mit

$$\boldsymbol{Jg} = \;\boldsymbol{A}\; = \begin{pmatrix} k\cos(\alpha) & -k\sin(\alpha) \\ k\sin(\alpha) & k\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Definitionen:

Winkeltreue einer Funktion f: Für alle $z_0 \in G$ gilt:

Winkel zwischen Kurven, die sich in z_0 schneiden bleiben bei der Abbildung $z \mapsto w = f(z)$ (in Größe und Orientierung) erhalten.

Längentreue: Für alle $z_0 \in G$ gilt:

Alle von z_0 ausgehenden Richtungen werden bei der Abbildung $z \mapsto w = f(z)$ um den gleichen Faktorgestreckt.

Konforme Abbildung:

f heißt konform, wenn f winkel- und längentreu ist.

Einige Eigenschaften holomorpher Funktionen:

- f ist in jedem Punkt z_0 mit $f'(z_0) \neq 0$ konform.

- u und v sind $C^\infty-$ Funktionen.

- u und v sind harmonische Funktionen. Das heißt
$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad \Delta v = 0$$

- Ist u harmonisch ($\Delta u = 0$), so gibt es v, so dass $f = u + iv$ holomorph ist. v heißt **konjugiert harmonische Funktion**.
$$\nabla v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_y \\ u_x \end{pmatrix}$$
Konstruiere Potential wie in Analysis III.

Vorlesung: Polynome (z), $\exp(z)$, deren Kompositionen und Umkehrungen sind überall in $\mathbb{C}$ wo sie definiert sind, komplex diffbar.

$$f(z) = \sqrt{z}$$

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Beispiel 1) In welchen Punkten aus $\mathbb{C}$ sind die unten gegebenen Funktionen f komplex differenzierbar?

- **A)** $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

  $f(z) = \text{Re}\,(z) \cdot \text{Im}\,(z) = xy + 0 \cdot i$

  Also $u(x,y) = xy,\ v(x,y) = 0$

  Cauchy Riemannschen Differentialgleichungen

  $$\begin{cases} u_x = v_y & \Longleftrightarrow \\ \textbf{und} & \\ u_y = -v_x & \Longleftrightarrow \end{cases}$$

  Die Funktion ist komplex diff.bar. in:

- **B)** $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$f(z) = \mathsf{Re}\,(z) \cdot \big((\mathsf{Re}\,(z))^2 - 3(\mathsf{Im}\,(z))^2 - 1\big)$$
$$+ \; i \cdot \big(\mathsf{Im}\,(z) \cdot \big(3(\mathsf{Re}\,(z))^2 - (\mathsf{Im}\,(z))^2 - 1\big)\big)$$
$$=$$

$$=$$

Cauchy Riemannschen Dgl'n: $\quad u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$

$u_x =$

$-u_y =$

- **C)** $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}\,,$

$$f(z) := \bar{z}^2 + \frac{1}{\bar{z}^2}\,.$$

Polarkoordinaten wären angenehmer. Also rechnet man mittels Kettenregel die CR-DGL'n um in

Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen in Polarkoordinaten

$$\boxed{u_r = \frac{1}{r} v_\phi\,, \qquad v_r = -\frac{1}{r} u_\phi}$$

Damit ergibt sich für

$$f(z) = \bar{z}^2 + \frac{1}{\bar{z}^2} = (re^{-i\phi})^2 + \frac{1}{r^2 e^{-2i\phi}}, \qquad r \neq 0$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$u(r,\phi) = \left(r^2 + \tfrac{1}{r^2}\right) \cdot \cos(2\phi), \qquad v(r,\phi) = \left(\tfrac{1}{r^2} - r^2\right) \cdot \sin(2\phi)$$

Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen:

$u_r =$

$\frac{1}{r} v_\phi =$

$v_r =$

$-\frac{1}{r} u_\phi =$

Faustregel: Wenn f explizit auf $\operatorname{Im}(z)$, $\operatorname{Re}(z)$, $\bar{z}, |z|, \arg(z)$ zugreifen **muss**, dann ist f nicht komplex differenzierbar.

Widerspricht das nicht Beispiel B?

Beispiel 2) Gegeben:

$$u(x+iy) = \mathsf{Re}\,(f(x+iy)) = e^{2x}\,\cos(2y)$$

Zeigen Sie, dass die Funktion u harmonisch ist.
Bestimmen Sie alle zu u konjugiert harmonischen Fkt'n v.

Bemerkung: Auch bei diesem Typ Aufgabe können Polarkoordinaten geeigneter sein:

$r \cdot u_r = v_\varphi$ und $r \cdot v_r = -u_\varphi$

Konforme Abbildungen

- f heißt **Winkeltreue:** Für alle $z_0 \in G$ gilt:

  Winkel zwischen Kurven, die sich in z_0 schneiden bleiben bei der Abbildung $z \mapsto w = f(z)$ (in Größe und Orientierung) erhalten.

  f heißt **Längentreue:** Für alle $z_0 \in G$ gilt:

  Alle von z_0 ausgehenden Richtungen werden bei der Abbildung $z \mapsto w = f(z)$ um den gleichen Faktor gestreckt.

  Konforme Abbildung:

  f heißt konform, wenn f winkel- und längentreu ist.

- Eine analytische Funktion ist in jedem Punkt $z \in D(f)$ mit $f'(z) \neq 0$ konform.

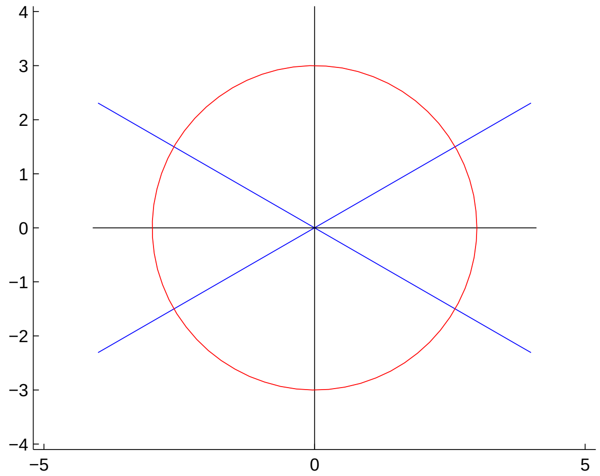
  Streckfaktor (lokal): $|f'(z_0)|$

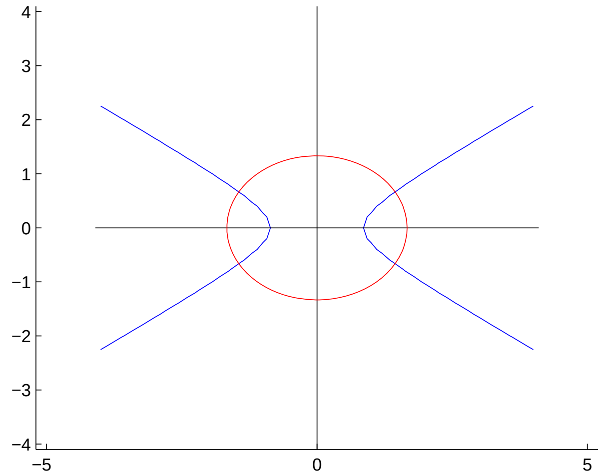
  Drehwinkel (lokal): $\arg(f'(z_0))$.

- Ist $f : z \to f(z) = u(z) + iv(z)$ in z_0 konform und u und v in einer Umgebung von z_0 stetig diffbar, dann ist f diffbar in z_0 mit $f'(z) \neq 0$.

Beispiel 3: $f(z) = z^2$

Beispiel 4: Die Joukowski Funktion $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$





Beispiel 5: Es sei $f(z) = \ln(z)$ für $z = re^{i\phi} \in \mathbb{C}$, mit $-\pi < \phi < \pi$.

Die Kurven $\Gamma_{1,2}$

$$\Gamma_1 = te^{i\frac{\pi}{4}},\ t \in \mathbb{R}^+, \qquad \Gamma_2 = 2e^{it}, t \in (0, \pi)$$

gehen beide durch den Punkt $z^* = \sqrt{2}(1+i)$. Um welchen Winkel werden die (Tangenten an die beiden) Kurven im Punkt z^* durch f gedreht?

Lösung: Γ_1 ist

Wegen $\ln(z) = \ln(|z|) + i\operatorname{arg}(z)$, wird Γ_1 durch f abgebildet auf

Alternativ:

Konforme Verpflanzung von Potentialen

Situation:
Potentialgleichung ist in einem schwierigen Gebiet zu lösen.

Idee:
Transformiere das Problem, so dass das Gebiet einfacher wird.

Hacken:
Im allgemeinen Fall entsteht eine schwierigere DGL.

Schön:
Bei konformen Transformationen bleibt es bei der Potentialgleichung. Genauer: später in der Vorlesung

Sei also $D \subset \mathbb{C}$ und $\Phi : D \to \mathbb{R}$ irgendeine C^2-Funktion.

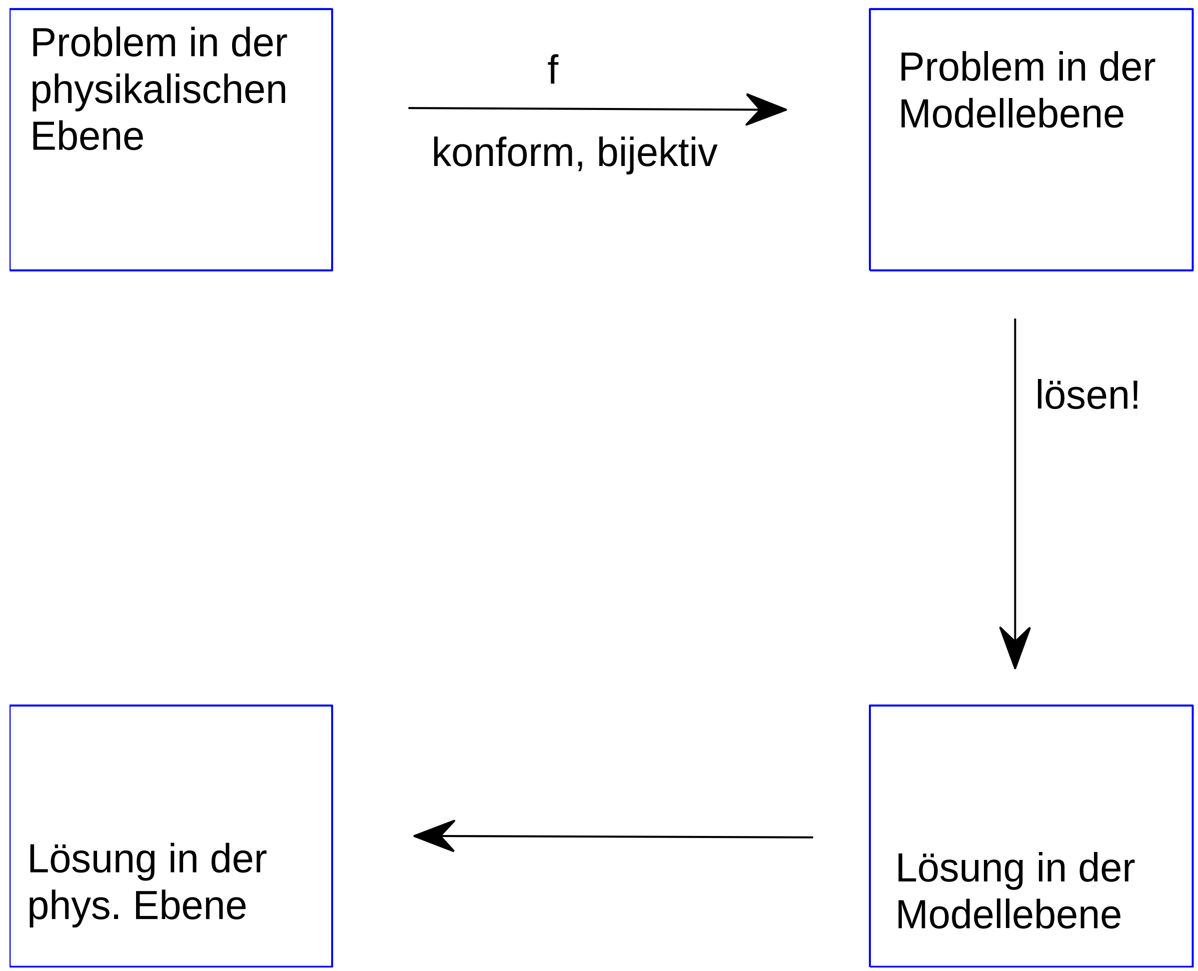
$f : D \to W \subset \mathbb{C}$, bijektiv $(f' \neq 0)$, analytisch
$f(z) = f(x+iy) = w = u + iv$

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, dashed, shift left, "f"] & W \arrow[l, dashed, shift left, "f^{-1}"] \arrow[d, "\Psi"] \\
\Phi & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Definiere: $\boxed{\Psi(w) := \Phi\left(f^{-1}(w)\right)}$

$=$ **konforme Verpflanzung von** ϕ **mittels** f.

Merke für später: $\Phi = \Psi \circ f$


Problem in der physikalischen Ebene
f
konform, bijektiv
Problem in der Modellebene
lösen!
Lösung in der phys. Ebene
Lösung in der Modellebene

Neben Potential Φ interessant: Feldstärke $E = -\text{grad}\,(\Phi)$

Gradient im $\mathbb{R}^2$: $(\Phi_x,\ \Phi_y)$. In $\mathbb{C}$ schreiben wir $(a + ib)$ statt (a, b):

$$\text{grad}\,_z\Phi(x+iy) = \ \Phi_x + \ i\Phi_y = \ \frac{\partial}{\partial x}\,\Phi(x+iy) + \ i\frac{\partial}{\partial y}\,\Phi(x+iy)$$

$$\text{grad}\,_w\Psi(u+iv) = \ \Psi_u + \ i\Psi_v$$

$$\text{grad}\,\Phi(z) = \ \text{grad}\,\Psi(w)\cdot\overline{f'(z)} \qquad \text{(1. Verpflanzungssatz)}$$

$$\Delta_z\Phi(z) = \ \Delta_w\Psi(w)\cdot|\,f'(z)\,|^2 \qquad \text{(2. Verpflanzungssatz)}$$

Wegen $f'(z) \neq\ 0$ folgt: $\Delta_z\Phi(z) = \ 0 \iff \Delta_w\Psi(w) = 0$

Was ist ein einfaches Gebiet? Es gibt einfache Lösungen in

In Ringen, Streifen, Sektoren, Außerhalb/innerhalb eines Kreises

Beispiel: Gegeben

Kreisscheibe $\tilde{K}_1 : |z - i| \leq 1$,
elektrostatisches Potential $= 0$ auf Rand $\tilde{K}_1$

Kreisscheibe $\tilde{K}_2 : |z + i| \leq 1$,
elektrostatisches Potential $= 1$ auf Rand $\tilde{K}_1$

Im Punkt 0 seien die Kreisscheiben gegeneinander isoliert.

Zur Bestimmung des induzierten elektrostatischen Potentials und der Feldstärke soll das Gebiet außerhalb der Kreisscheiben bijektiv und konform auf einen Ring oder einen Streifen abgebildet werden.

Welche der beiden Tansformationen (Ring bzw. Streifen) ist möglich?

Geben Sie eine Transformation an, die das gewünschte leistet.

Lösung:

Transformation auf einen Ring:

Transformation auf Streifen $\longleftrightarrow$

Zwei Kreise auf zwei parallele Geraden geht mit ?

Schnittpunkt der Kreise $\longrightarrow$ Schnittpunkt der Geraden $=$?

Also $T(0) =$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit: $T(z) = \frac{az+b}{z}$.

Wegen $0 \in \mathbb{R} \cap i\mathbb{R}$ sind

$T(\mathbb{R})$ und $T(i\mathbb{R})$

$\mathbb{R} \cap i\mathbb{R} = \{0, \infty\}$

$T(\mathbb{R}) \cap T(i\mathbb{R}) = \{\infty, \ldots\}$

Also: $T(z) = \frac{b}{z}$

Mit $b \in \mathbb{R}$ folgt: $T(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ und $T(i\mathbb{R}) = i\mathbb{R}$.

Wir wählen $\quad T(z) = \dfrac{1}{z}$.

Kreise symmetrisch zu $i\mathbb{R}$

$\Longrightarrow$ Bildgeraden symmetrisch zu $T(i\mathbb{R})$

$\Longrightarrow$ Bildgeraden parallel zu $\mathbb{R}$.

$T(2i) = -i/2$ und $T(-2i) = i/2$.

$T(K_1) =$ Gerade mit $\mathrm{Im}\,(z) = -1/2$ und

$T(K_2) =$ Gerade mit $\mathrm{Im}\,(z) = 1/2$

$T(\infty) = 0 \Longrightarrow$ Das Äußere der beiden Kreisscheiben geht in den Streifen zwischen den beiden Geraden über.

Lösung Potentialproblem: Problem in der physikalischen Ebene:

$$\begin{aligned} \Delta(\Phi) &= 0 \quad \text{Außerhalb der beiden Kreise,} \\ \Phi(z) &= 0 \quad \text{für} |z - i| = 1, \\ \Phi(z) &= 1 \quad \text{für} |z + i| = 1. \end{aligned}$$

Problem in der Model–Ebene:

$$\begin{aligned} \Delta(\Psi) &= 0 \quad \text{für } -\frac{1}{2} < \operatorname{Im}(w) < \frac{1}{2} \\ \Psi(w) &= 0 \quad \text{für } \operatorname{Im}(w) = -\frac{1}{2}, \\ \Psi(w) &= 1 \quad \text{für } \operatorname{Im}(w) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Damit entspricht Ψ dem elektrostatischen Potential zwischen zwei parallelen Platten. Da die Daten auf den Geraden konstant sind, wählen wir den

Ansatz $\Psi(u, v) = g(v)$.

Einsetzen in DGL ergibt: $g''(v) = 0 \implies g(v) = a + bv$

Randdaten: $g(-\frac{1}{2}) = 0$ und $g(\frac{1}{2}) = 1$

$\implies a - \frac{b}{2} = 0$ und $a + \frac{b}{2} = 1$

$b = 1\,, a = \frac{1}{2}$,

$g(v) = v + \frac{1}{2} = \mathsf{Im}\,(w) + \frac{1}{2}$.

$$\Psi = \frac{1}{2} + v = \frac{1}{2} + \mathsf{Im}\,(w)$$

Das gesuchte Potential im physikalischen Raum erhalten wir durch Rücktransformation:

$$\Phi(x, y) = \Psi(T(z)) = \frac{1}{2} + \mathsf{Im}\,(T(z)) =$$

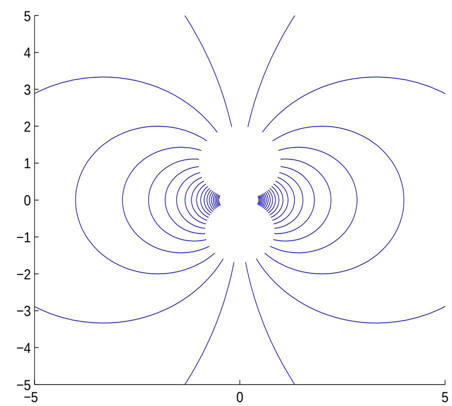
Für die Feldstärke gilt dann

$$E = -\mathrm{grad}\,(\Phi) = -\Phi_x - i\Phi_y = \; -\mathrm{grad}\,(\Psi(T(z))\overline{T'(z)}. \text{ Also}$$

$$E(z) = \; -\mathrm{grad}\,\Psi\left(\tfrac{1}{z}\right)\overline{\left(\frac{-1}{z^2}\right)} = \; -i \cdot \left(\frac{-1}{\bar{z}^2}\right) = \; i \cdot \left(\frac{z^2}{|z|^4}\right)$$

Oder durch direktes Ableiten von Φ:

$$E = -\mathrm{grad}\,(\Phi) = -\Phi_x - i\Phi_y = \; \left(\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} + i\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right).$$



Tipps zur Hausaufgabe: