Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg SoSe 2021

Dr. Hanna Peywand Kiani

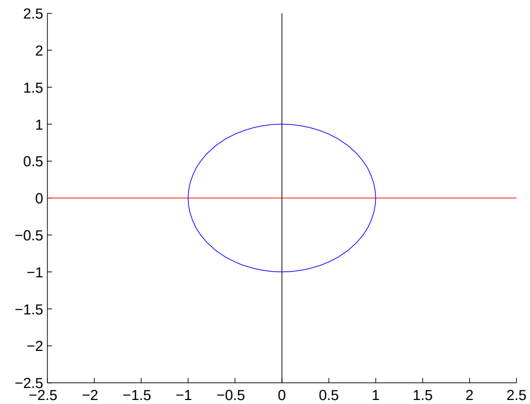
Hörsaalübung 4 Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Jukowski Funktion,
Möbius-Transformation

Joukowski-Funktion $w = f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, $z = re^{i\phi} \neq 0.$

Ziel: Bestimme Bilder für r bzw. ϕ fest

i) Offensichtlich: $f(z) = f(\frac{1}{z})$.
$f(re^{i\phi}) = f(\frac{1}{re^{i\phi}}) = f(\frac{1}{r}e^{-i\phi})$



ii) Einheitskreis: $z = e^{i\phi}$:
$f(z) = \frac{1}{2}\left(e^{i\phi} + e^{-i\phi}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos(\phi) + i\sin(\phi) + \cos(-\phi) + i\sin(-\phi)\right) = \cos(\phi)$$

Kreise um Null mit $r \neq 1$ werden auf Ellipsen abgebildet:

$$f(re^{i\phi}) = \frac{1}{2}\left(re^{i\phi} + \frac{1}{r}e^{-i\phi}\right) = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos(\phi) + \frac{i}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin(\phi)$$

Halbachsen: $a = f(r) =$ $\qquad\qquad$ $b = |f(ir)| =$

Beispiel: $|z| = 3$ bzw. $|z| = \frac{1}{3}$

$f(3) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $f(\frac{1}{3})$

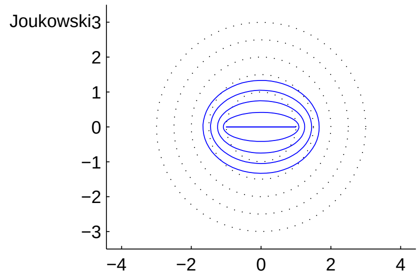
$f(3i)$ $\qquad\qquad\qquad$ $f(\frac{1}{3i})$

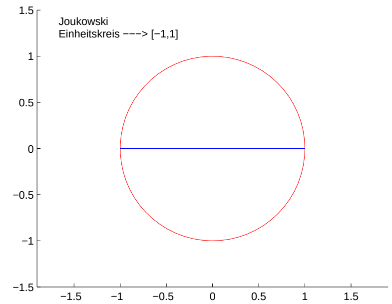
Zwecks Umkehrbarkeit: Einschränkung des Definitionsbereiches auf:

$$G := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \ \to \ \mathbb{C} \setminus [-1, 1],$$

Äußeres eines Kreise um Null wird auf das Äußere der Bildellipse abgebildet.

Äußere des Einheitskreises $\longrightarrow$
die längs $\mathbb{R}$ von -1 bis 1 aufgeschnittene komplexe Zahlenebene





Umkehrung der Joukowski Funktion $f : G \to \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

$$\boxed{f^{-1}(w) = w + \sqrt{w^2 - 1}}$$

Ellipsen mit $a^2 - b^2 = 1$ werden auf Kreise um Null abgebildet.

Bei richtiger Wahl der Wurzel (+/-): Äußere der Ellipse auf Äußeres des Bildkreises.

Beispiel: $z = x + iy$, $(\frac{12x}{13})^2 + (\frac{12y}{5})^2 = 1$.

$f^{-1}(\frac{13}{12}) =$

$$f^{-1}(-\frac{5i}{12}) = -\frac{5i}{12} \pm \sqrt{-\frac{25}{144} - \frac{144}{144}} =$$

Jetzt wieder auf ganz $\mathbb{C}$: Strahlen zu Winkeln ϕ und $-\phi$ (außer $k\pi/2$) werden auf einen Ast der Hyperbel

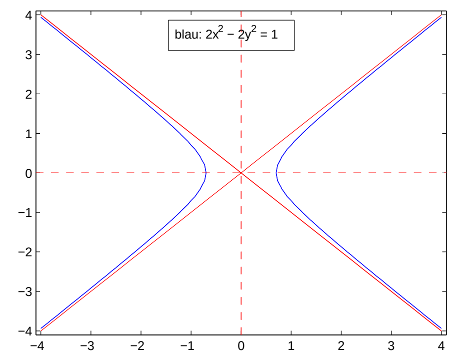
$$w = u + iv, \qquad \frac{u^2}{\cos^2(\phi)} - \frac{v^2}{\sin^2(\phi)} = 1$$

abgebildet. Denn

$$w = f(re^{i\phi}) = \tfrac{1}{2}\left(r + \tfrac{1}{r}\right)\cos(\phi) + \tfrac{i}{2}\left(r - \tfrac{1}{r}\right)\sin(\phi)$$

Schränke Definitionsbereich ein auf: $z \in \mathbb{C}$, $\mathbf{Im}\,(z) > 0$

Strahl der rechten/linken oberen Viertelebene zum Winkel $\phi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ bzw. $\pi - \phi$ wird auf rechten/linken Zweig der Hyperbel abgebildet.
Umkehrung der Joukowski Funktion
$f^{-1}(w) = w + \sqrt{w^2 - 1}$

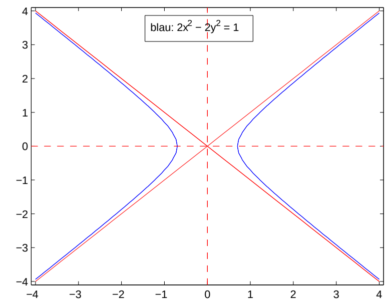


Zu $i\mathbb{R}$ symmetrische Hyperbeln $\dfrac{u^2}{a^2} - \dfrac{v^2}{b^2} = 1$ mit $a^2 + b^2 = 1$ werden auf zwei Strahlen in der Oberen Halbebene abgebildet

Beispiel: Zur Berechnung des Feldes zwischen zwei hyperbolischen Elektroden:

Bereich außerhalb der Elektroden $\longrightarrow$ Sektor

Beispiel: Hyperbel: $2x^2 - 2y^2 = 1$



rechter Teil (Ast) der Hyperbel: $f^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2}) =$

linker Teil (Ast) der Hyperbel: $f^{-1}(-\frac{\sqrt{2}}{2}) =$

Zwischenraum: $f^{-1}(0) =$

Ergebnis: Sektor $|w| \in (0, \infty)$, arg $(w) \in]\pi/4, 3\pi/4[$

Möbius-Transformation

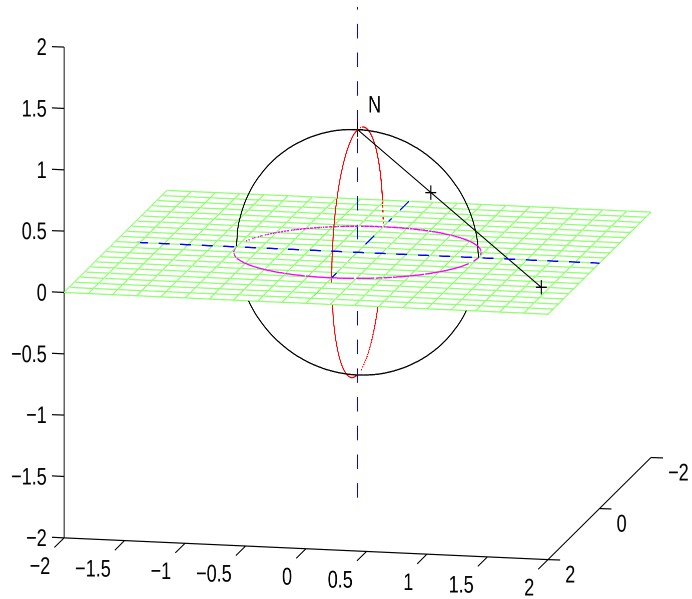
$$T:\ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad \neq bc, \quad c \neq 0$$

Zur Untersuchung dieser Funktionen betrachte die stereographische Projektion:

$S_2 :=$ die Oberfläche der Einheitskugel im $\mathbb{R}^3 =$ Riemannsche Zahlenkugel

$$S_2 := X = (X_1,\, X_2,\, X_3,\,) \in \mathbb{R}^3 :\ \|X\|_2 \, = \, 1$$

wird auf die Ebene $(X_1,\, X_2)$ abgebildet und diese wiederum wird mit $\mathbb{C}^* \ := \mathbb{C} \cup \infty$ identifiziert.

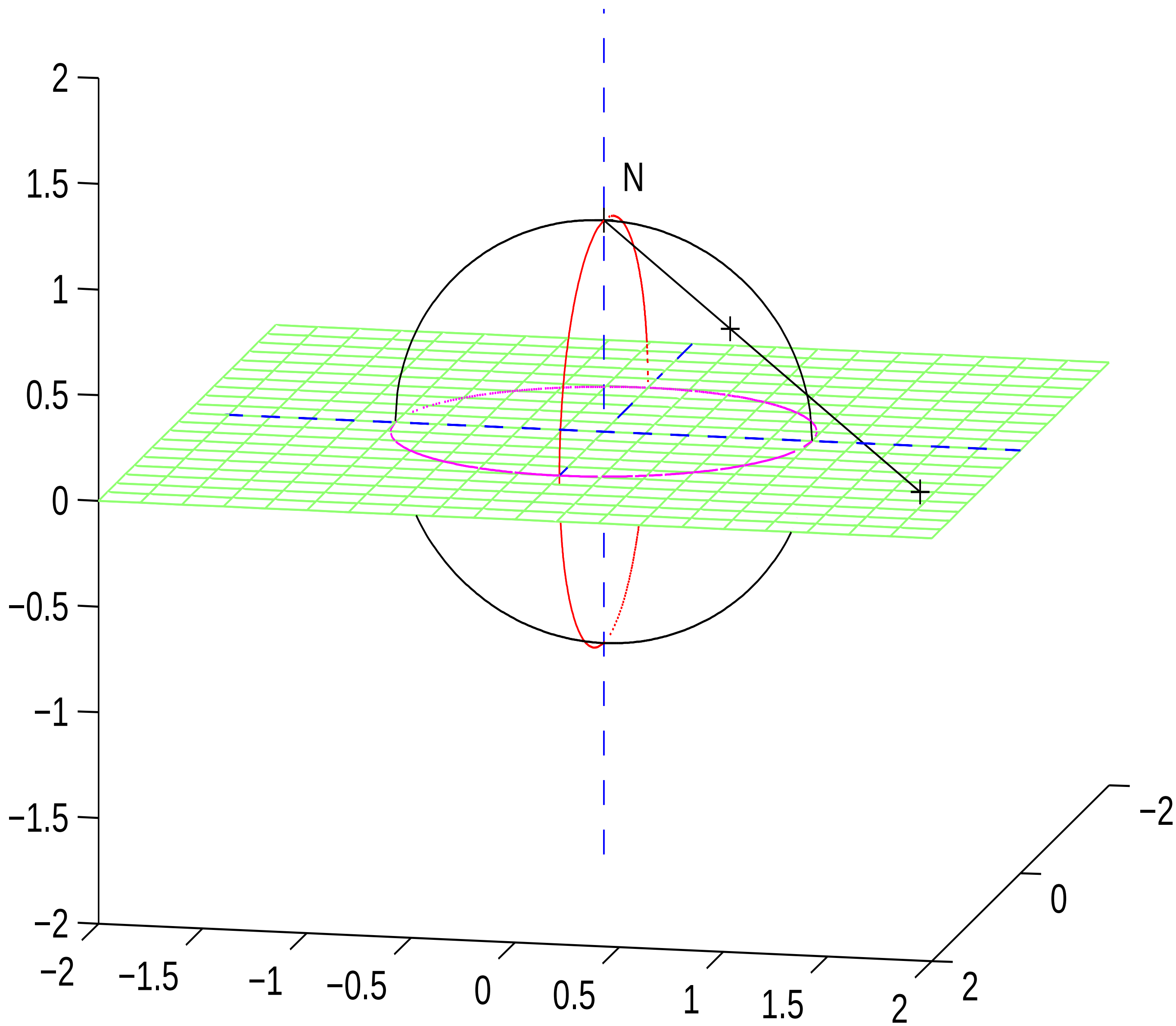


Nordpol der Kugel $=: N = (0, 0, 1)^T$

Abbildungsvorschrift: bestimme den Schnittpunkt $(x, y)^T$ der Geraden durch X und N mit der X_1, X_2 −Ebene bzw. mit C^*.

Bijektive Abbildung $P: S_2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$

Durch Festlegung $P(N) =: \infty$, bijektive Abbildung $P: S_2 \to \mathbb{C}^*$.


N
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
−2
0
2

Gerade in $\mathbb{C}^*$ $\longleftrightarrow$ Kreis auf S_2 der durch N geht!
Ebene durch N geschnitten mit Kugeloberfläche S_2

Kreis in $\mathbb{C}^*$ $\longleftrightarrow$ Kreis auf S_2 der nicht durch N geht!
Kegel mit Spitze in N geschnitten mit Kugeloberfläche S_2

„Kreis“ := Verallgemeinerter Kreis = Kreis oder Gerade

Verallgemeinerte Kreise werden auf verallgemeinerte Kreise abgebildet.

Rechenvorschrift: s. Vorlesung Seite 46.

Zurück zur Möbius Transformation

Möbius-Transformation

$$T:\ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad \neq bc, \quad c \neq 0$$

$\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \infty, \qquad T(\infty) := \frac{a}{c}, \qquad T(-\frac{d}{c}) := \infty.$

Verallgemeinerte Kreise : Kreise oder Geraden

Kreistreue:

$-\frac{d}{c} \in$ „Kreis“ $\Longrightarrow T($„Kreis“$) =$ Gerade

$-\frac{d}{c} \notin$ „Kreis“ $\Longrightarrow T($„Kreis“$) =$ echter Kreis

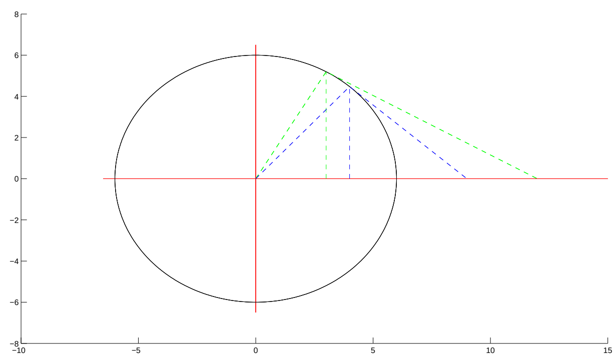
Kreissymmetrie : Symmetrien bzgl. „Kreise“ bleiben erhalten

Symmetrie bzgl. einer Gerade : klar (Spiegelung)

z, z' symmetrisch bzgl. Kreis mit Radius R und Mittelpunkt M $\Longleftrightarrow$

z, z' liegen auf einem von M ausgehenden Strahl und

$|z - M| \cdot |z' - M| \;=\; R^2 \Longleftrightarrow (z - M) \cdot (\bar{z}' - \bar{M}) \;=\; R^2$



Mittelpunkt M von Kreis K und ∞ sind symmetr. bzgl. K

Denn: $\qquad z \to \infty \quad \Longrightarrow \quad |z - M| \to \infty \Longrightarrow \quad |z' - M| \to 0$

Für jede Möbius-Transformation T gilt daher:

$T(M), T(\infty)$ **sind symmetrisch bzgl. Bild„kreis“ $T(K)$.**

Dreipunktrelation:

Nach Vorlesung gilt für $w = T(z)$ und drei Punktepaaren

$w_j = T(z_j)$, $j = 1, 2, 3$:

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

Beispiel: Gesucht Möbius Transformation mit

$$T(1) = -i, \qquad T(i) = 0, \qquad T(2i) = \tfrac{1}{3}\,.$$

$$\frac{w - (-i)}{w - 0} : \frac{\frac{1}{3} - (-i)}{\frac{1}{3} - 0} = \frac{z - 1}{z - i} : \frac{2i - 1}{2i - i}$$

Auflösen nach w ergibt: $T(z) = \dfrac{z - i}{z + i}$.

Beispiel:

a) Bestimmen Sie eine Möbius–Tranformation $T : z \to w$ mit

$T(2i) = 0$, $T(-2i) = \infty$, $T(0) = 1$.

b) Welches sind die Bilder von

(i) $i\mathbb{R}$,

(ii) $\mathbb{R}$,

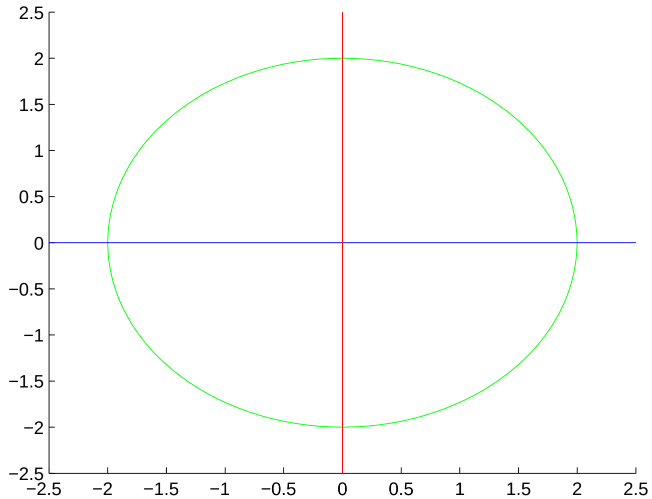
(iii) $K := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$,

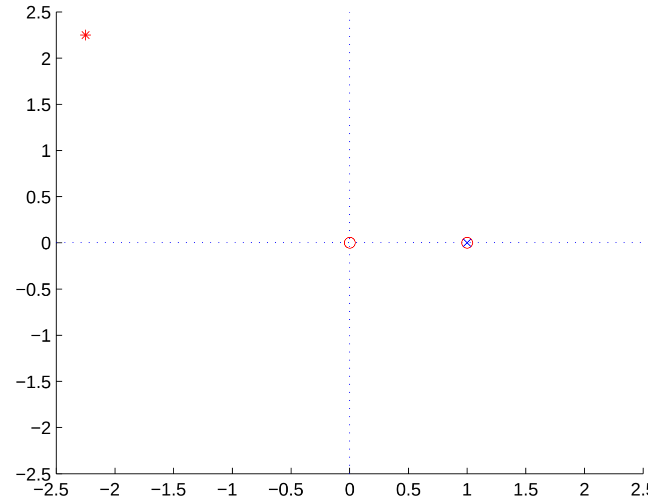
(iv) $g := \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}\, z = -1\}$

(v) $Q := \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy,\ x, y > 0\}$

(vi) $|z| \leq 8$?

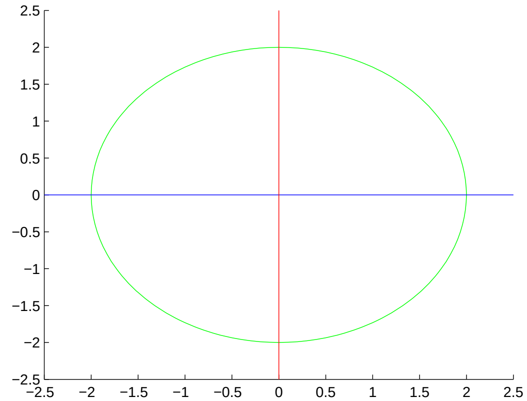
a) $$T(z) = \frac{2i - z}{2i + z}\,.$$

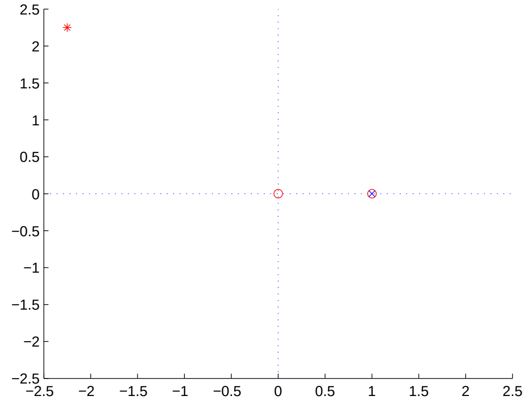




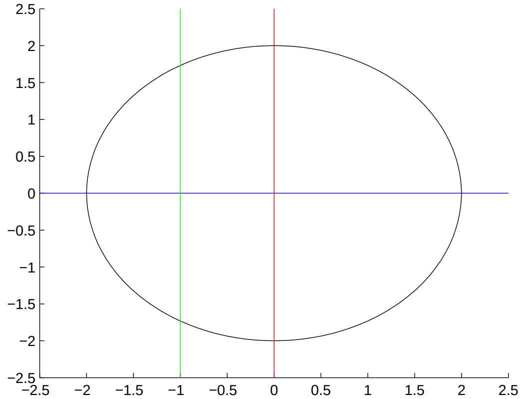
b)(i) Bild von $i\mathbb{R}$:

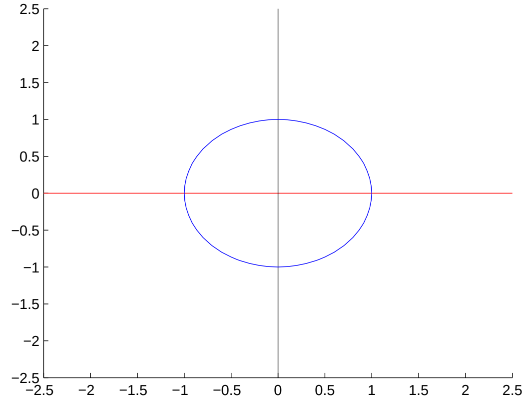
(ii) Bild von $\mathbb{R}$:





(iii) Bild des Kreises $|z| = 2$:





(iv) Bild der Gerade $g:\ \mathrm{Re}\, z = -1$.
$-2i$ liegt nicht auf $g \Longrightarrow$ Das Bild ist ein echter Kreis.

Im Bildraum sind ∞ und der Mittelpunkt M des Bildkreises symmetrisch bzgl. des Bildkreises.

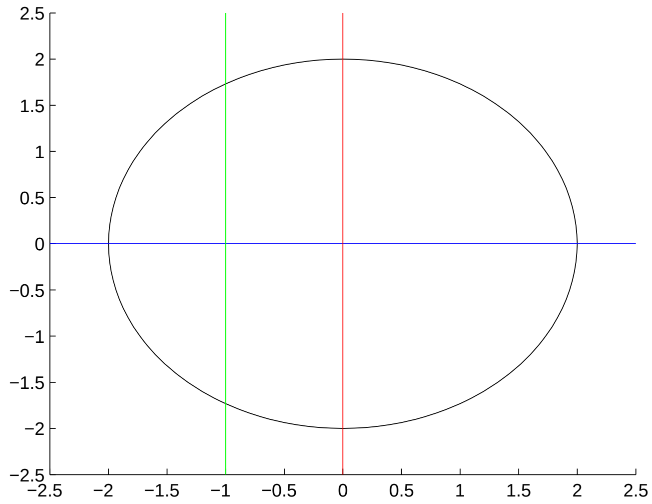
Es gilt $T^{-1}(\infty) = -2i\cdot$

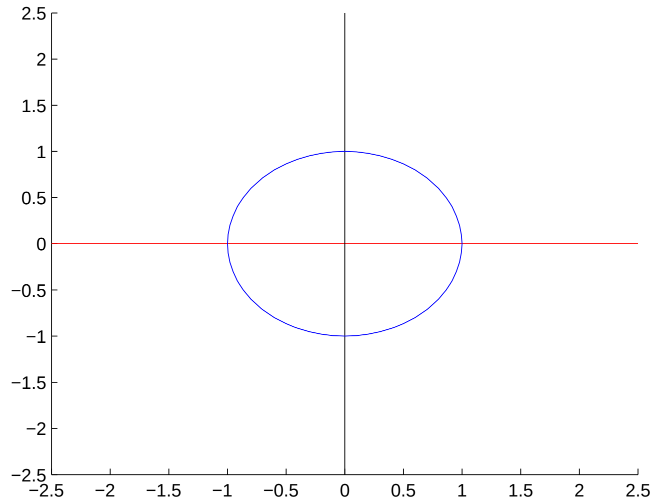
$\Longrightarrow T^{-1}(M) =$?
$\Longrightarrow\ M =$

(v) Bild von $Q := \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy,\ x, y > 0\}$:

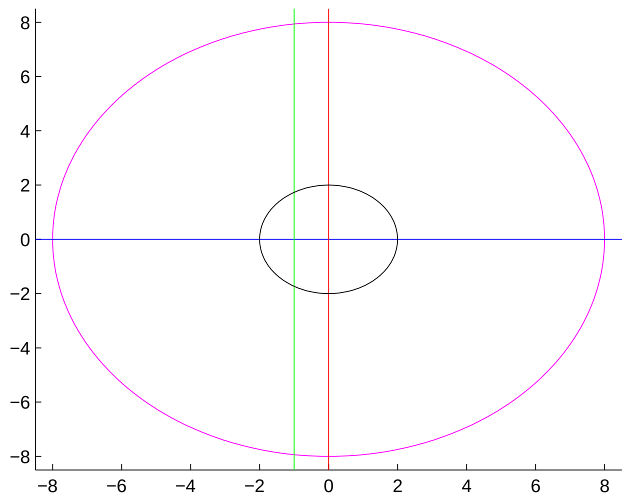
$$T(i\mathbb{R}) = \mathbb{R}\,, \qquad T(-2-2i) = -1-2i$$

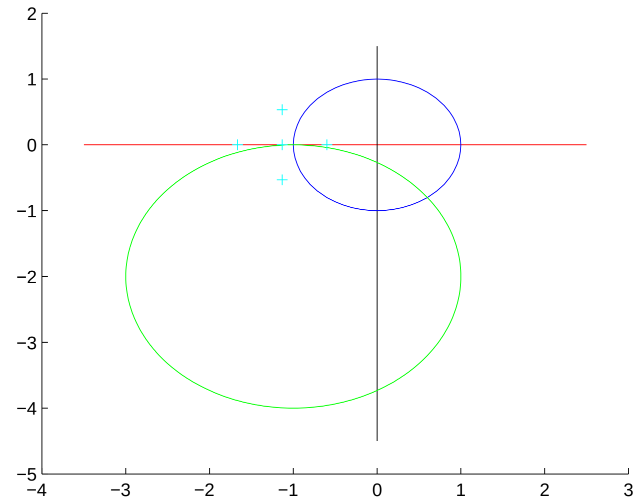
$$T(\mathbb{R}) = \text{ Einheitskreis,} \qquad T(2i) = 0$$





(vi) Bild von $|z| \leq 8$: Das Bild von $|z| = 8$ ist ein echter Kreis symmetrisch zu $\mathbb{R}$, da Urbild symmetrisch zu $i\mathbb{R}$.





$$T(8i) = -\frac{3}{5}, \qquad T(-8i) = -\frac{5}{3}$$

erhält man den Mittelpunkt M und den Radius R:

$$M = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{5} - \frac{5}{3}\right) = -\frac{17}{15} \qquad R = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{5} + \frac{5}{3}\right) = \frac{8}{15}.$$

$T(0) = 1 \Longrightarrow$ Innere des Kreises $|z| \leq 8$ auf das Äußere des Bildkreises.