Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg SoSe 2021

Dr. Hanna Peywand Kiani

Hörsaalübung 2 Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Komplexe Zahlenebene, Elementare Funktionen, 1. Teil

Die ins Netz gestellten Kopien der Dateien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT!

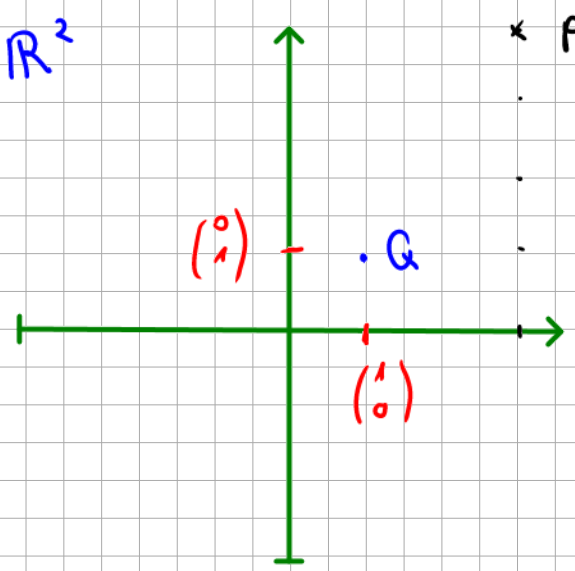
Eine Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

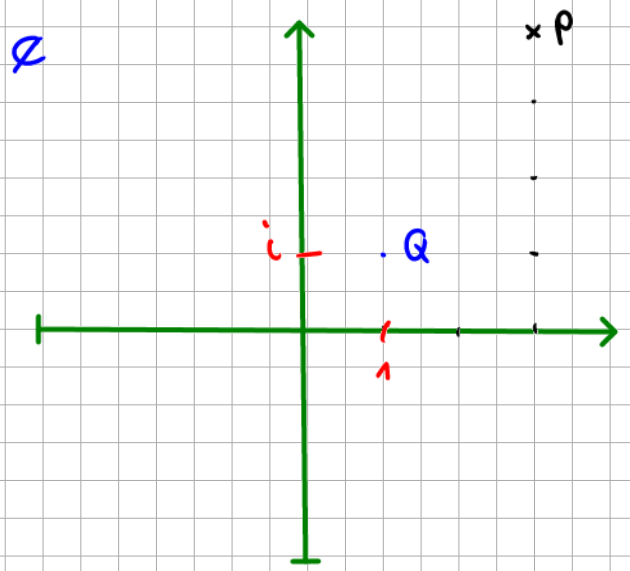
Gegeben: Punkte in einer Ebene

Frage: Wie eindeutig darstellen?

$\longrightarrow$

- Koordinatensystem einführen
- Einheiten festlegen





Einheiten $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$$P = 3\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

Einheiten 1 und i

$$P = 3\cdot 1 + 4\cdot i$$

Addition: komponentenweise

$$P+Q = \left[3\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right] + \left[1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]$$

$$= (3+1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (4+1)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3+1\\4+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$$

$$P+Q = [3\cdot 1 + 4\cdot i] + [1\cdot 1 + 1\cdot i]$$

$$= (3+1)\cdot 1 + (4+1)\,i$$

$$= 4\cdot 1 + 5\cdot i$$

Komplexe Zahlenebene

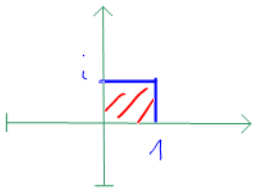
$z \in \mathbb{C} : z := x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad i =$ imaginäre Einheit

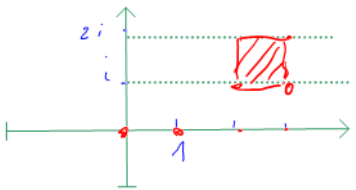
$x =:$ Re $(z), \quad y =:$ Im (z)

Addition und Multiplikation im $\mathbb{R}^2 \longleftrightarrow \mathbb{C}$

Addition: wie im $\mathbb{R}^2$ komponentenweise

Geometrische Interpretation:





$f : z \to z + c$

$c = 2 + i$

Im $\mathbb{R}^2$ gibt es keine Multiplikation $v, w \in \mathbb{R}^2, v * w \in \mathbb{R}^2$, nur

$$w.v := < w, v > \in \mathbb{R}, \qquad Av \in \mathbb{R}^2, \quad A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

In der komplexen Zahlenebene definiere:

$$(a+ib)(x+iy) := (ax - by) + i(ay + bx) \qquad \in \mathbb{C}$$

Andererseits: $(a+ib)(x+iy) = ax + iay + ibx + i^2 by$

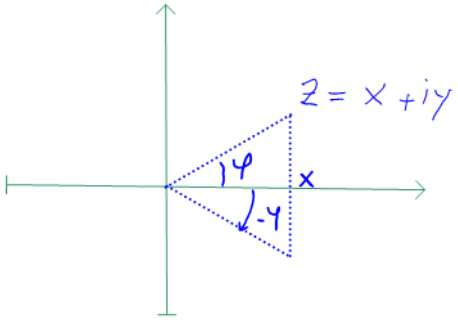
$i^2 = (0.1 + 1.i)(0.1 + 1.i) = 0.0 - 1.1 + i(0.1 + 1.0) = -1$ ✓

Division: Mit der

$z = x + iy$

Konjugiert komplexe Zahl: $\bar{z} := x - iy$

Geometrisch : Spiegelung an der reellen (x)-Achse



$$\frac{z_1}{z_2} := \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2}$$

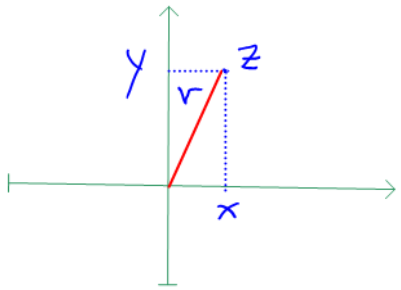
$z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy)$

$= x^2 - (iy)^2 = x^2 - i^2 y^2$

$= x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$

Betrag / Modul: Abstand zu $0 + i \cdot 0$

$=$ **Länge des Ortsvektors** $= \sqrt{x^2 + y^2}$**.**



$$|z|^2 = x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy) = z \cdot \bar{z}\,.$$

$|z_1 - z_2|$ = Abstand von z_1 und z_2

Beispiele: Welche geometrische Gebilde werden beschrieben durch

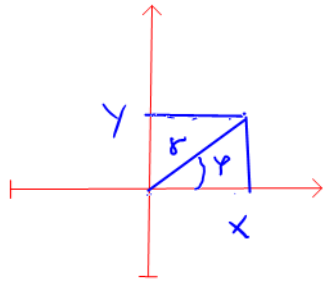
$(z - 5)(\bar{z} - \bar{5}) = 4,$ $\quad (z-5)\overline{(z-5)} \overset{*}{=} |z-5|^2 = 4 \iff |z-5| = 2$

Kreis $M = 5$ $R = 2$

$|z + 2 + i| = 3,$ $\quad |z - (-2 - i)| = 3$ Kreis $M = -2 - i$ $R = 3$

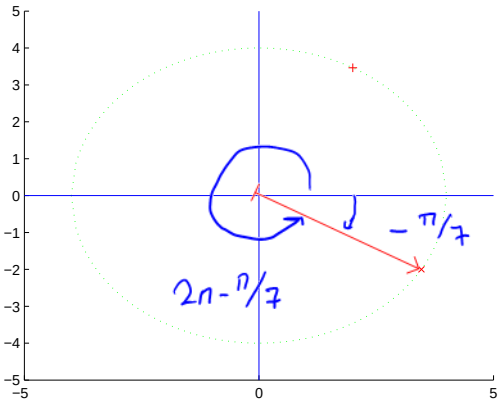
$|z - 2i| = |z - 1|$ //

Polarkoordinaten: wie im $\mathbb{R}^2$: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$



$x = r\cos(\varphi), \qquad y = r\sin(\varphi)\,,$

$z = r\,(\cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi)\,) =$



$r = |z|$ = Abstand von z und Null

ϕ = Winkel zwischen Ortsvektor und positiver $x-$Achse in mathematisch positiver Richtung
= $\arg(z)$ = **Argument von z.**

$z = x + iy$ gegeben $\Longrightarrow$ Argument nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt!

Es gilt: $\cos(\phi) + i \cdot \sin(\phi) = e^{i\phi}$.

Exponentialfunktion:

Wegen $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$ gilt

$$i^{4k} = 1, \qquad i^{4k+1} = i, \qquad i^{4k+2} = -1 \qquad i^{4k+3} = -i.$$

und damit für alle $y \in \mathbb{R}$

$$\exp(iy) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(iy)^l}{l!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{i^l y^l}{l!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{y^{4k}}{(4k)!} - \frac{y^{4k+2}}{(4k+2)!} \right) + i \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{y^{4k+1}}{(4k+1)!} - \frac{y^{4k+3}}{(4k+3)!} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left((-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} \right) + i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left((-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \right)$$

$\cos(y)$ $\qquad$ $\sin(y)$

$$e^{iy} = \cos(y) + i \sin(y)$$

Also erhalten wir für $z = x + iy$

$$x = r\cos(\varphi), \qquad y = r\sin(\varphi)\,, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z = r\,(\,\cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi)\,) = re^{i\varphi} = |z|e^{i\varphi}$$

Argument von $z =$ $\arg(z) = \arg(re^{i\varphi}) = \varphi$ **?**

Achtung: Argument nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt, denn $e^{i\varphi}$ ist 2π periodisch!

$$re^{i\varphi} = re^{i(\varphi + 2k\pi)} \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

$\{\arg z\}$ oder $[\arg z]$:= Menge aller Argumente von z

$\arg(z)$:= Hauptwert von Argument z, festgelegt durch zusätzliche Bedingung

$$\text{i.d.R.} \qquad \varphi \in]-\pi, \pi] \qquad \text{(Hauptwert)}$$

$\arg(0)$ ist nicht definiert!

Beispiele:

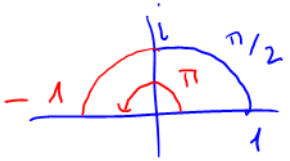
A: Einheitskreis:

$$K_1 := \{z \in \mathbb{C} : z = re^{i\varphi}, r = 1, \varphi \in [0, 2\pi)\}$$

$$= \{z \in \mathbb{C} : z = e^{i\varphi}, \varphi \in [0, 2\pi)\}$$

oder $= \{z \in \mathbb{C} : z = e^{i\varphi}, \varphi \in (-\pi, \pi]\}$?

B: Imaginäre Einheit: $|i| = |0 \cdot 1 + 1 \cdot i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$



Wie sieht i in Polarkoordinaten aus?

$i = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$

$i^2 = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{2}} = 1e^{i\pi} = -1$

C: Betrag e^z :

$w = e^z =: \rho\, e^{i\alpha}$ $\quad \rho = ?$ $\quad \alpha = ?$

$\rho = |w| = |e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x \cdot e^{iy}| = |e^x| \cdot |e^{iy}|$

Wegen $|e^{iy}| = |\cos(y) + i\sin(y)| = \sqrt{\cos^2(y) + \sin^2(y)} = 1$

$$|e^z| = e^x = e^{\mathrm{Re}\,(z)}$$

Und, $\arg(e^z)$?

$w = e^z = e^x \cdot e^{iy} = \rho\, e^{i\alpha}$ $\quad \alpha = ?$

$e^x \in \mathbb{R}^+$

$= e^x\, e^{i\alpha}$

1

$e^{iy} \overset{!}{=} e^{i\alpha}$

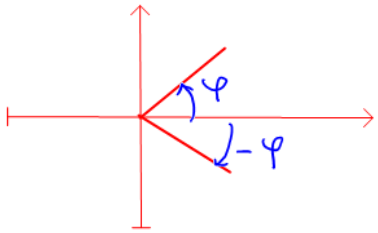
$\cos(y) + i\sin(y) = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$

$y = \alpha + 2k\pi$

$e^{x+iy} = e^{x+i(y+2k\pi)}$

Konjugiert komplexe Zahl polar:

$z = re^{i\varphi} \Longrightarrow \bar{z} = re^{-i\varphi}$



Geometrisch : Spiegelung an der reellen (x)-Achse

Addition

$z \mapsto c + z$: Verschiebung um c

$\underbrace{\rho e^{i\alpha}}_{(c_1 + c_2 i)} + \underbrace{re^{i\varphi}}_{(x+iy)}$

$= (c_1 + x) + i(c_2 + y)$

$\rho e^{i\alpha} + re^{i\varphi} = ? e^{i?}$

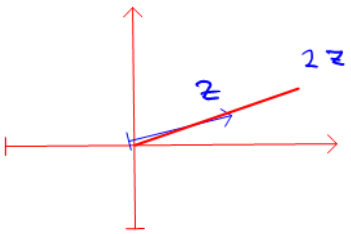
Addition polar: ?

schwierig!

Rechnung besser kartesisch

Geometrische Interpretation der Multiplikation:

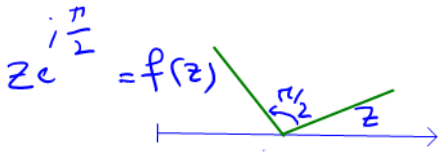
1. Fall: $a \in \mathbb{R}^+$, $z := re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$



$z \mapsto az = are^{i\varphi}$: Streckung (Stauchung) um Faktor a.

2. Fall: $c = e^{i\alpha} \in \mathbb{C}$, $z := re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$

$e^{i\alpha} \cdot re^{i\varphi} = re^{i\alpha} \cdot e^{i\varphi} = re^{i\alpha+i\varphi}$



$z \mapsto cz = re^{i(\varphi+\alpha)}$: Drehung um Winkel α.

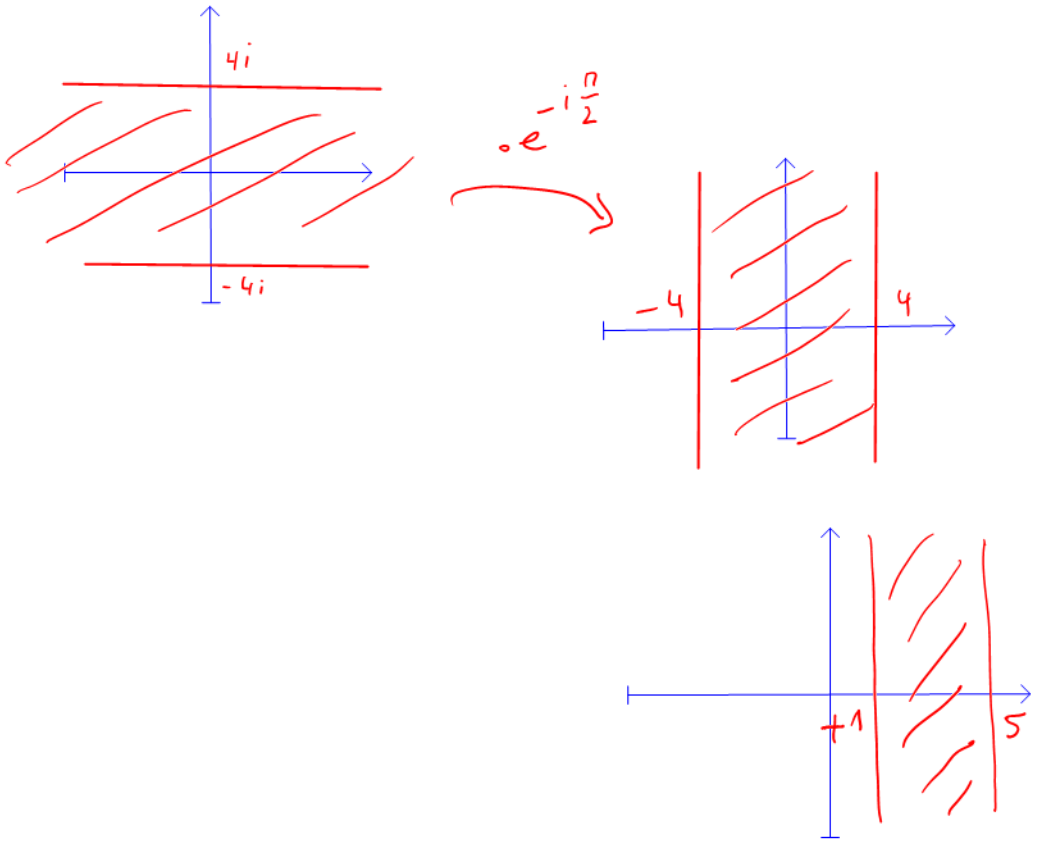
3. Fall: $c = ae^{i\alpha} \in \mathbb{C}$, $z := re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$

$z \mapsto cz = are^{i(\varphi+\alpha)}$: Drehstreckung.

Beträge werden multipliziert. Argumente werden addiert.

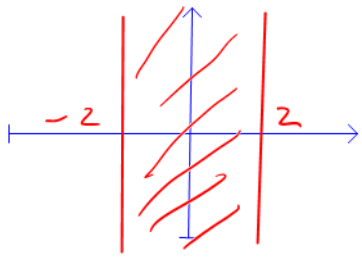
Beispiel: Streifen unter affin linearer Funktion

$$D := \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}\,(z)| \leq 4\}, \qquad f(z)) := \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}\, z + 3$$



$f_1(z) : z \longrightarrow e^{-i\frac{\pi}{2}} \cdot z = \hat{z}$

$f_2(\hat{z}) : \hat{z} \longrightarrow \frac{1}{2}\hat{z} = \tilde{z}$



$f_3(\tilde{z}) = \tilde{z} + 3$

$\hat{z} = f_3(\tilde{z}) - 3$

$2 = 5 - 3$

Geometrische Interpretation der affin linearen Funktion

$$f(z) = cz + d$$

Drehstreckung + anschließender Verschiebung

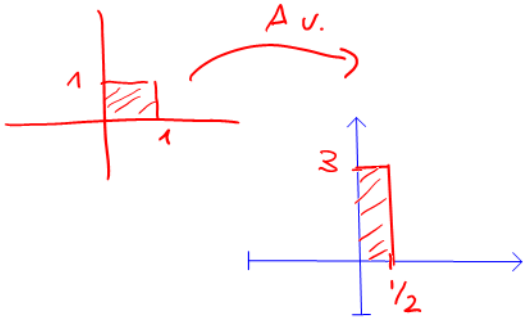
~~Streckung ist in alle Richtungen gleich!~~

Unterschied zu linearen Abbildungen im $\mathbb{R}^2$:

zum Beispiel : $\boldsymbol{v} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}$

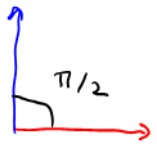
Streckung um 1/2 in $x-$Richtung und um 3 in $y-$Richtung

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/2 \\ 3y \end{pmatrix}$$

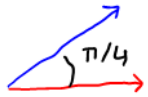


$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Winkel zwischen Urbildern $= \frac{\pi}{2}$,

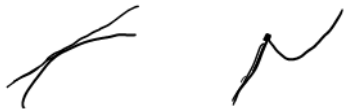


Winkel zwischen Bildern $= \frac{\pi}{4}$.



Bei der komplexen Multiplikation $c \cdot z$ wird nur gedreht und gestreckt. Winkel bleiben erhalten!

Lineare Funktionen in $\mathbb{C}$ können viel weniger als lineare Funktionen in $\mathbb{R}^2$



Zur Erinnerung: Differenzierbarkeit= hinreichend gute Approximierbarkeit durch lineare Funktionen

Differenzierbarkeit in $\mathbb{C}$: viel mehr als Differezierbarkeit im $\mathbb{R}^2$!

Lokal: $f(z) =: u(x,y) + i\,v(x,y) \approx az + b$

Im $\mathbb{R}^2$: $\tilde{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} \Longrightarrow J\tilde{f}(x,y) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$

Drehstreckung im $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \boldsymbol{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} k\cos(\alpha) & -k\sin(\alpha) \\ k\sin(\alpha) & k\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Später: Diffbarkeit in $\mathbb{C}$:

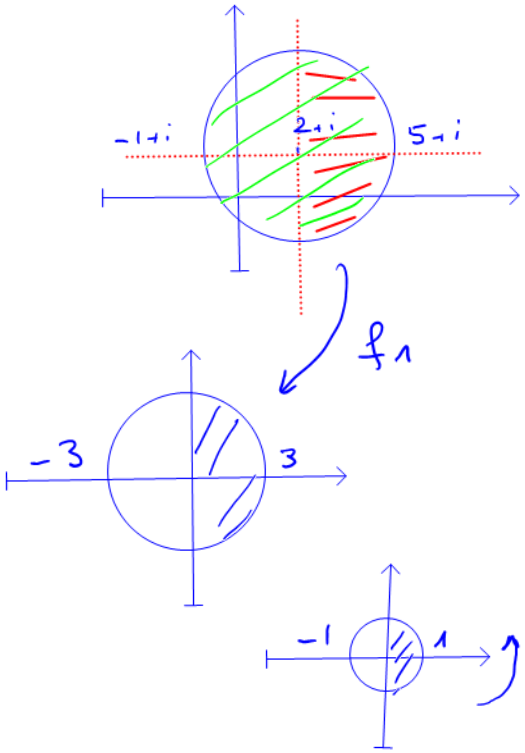
$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y$

(Cauchy-Riemannsche DGL'n).

Beispiel für eine Lineare Funktion: Die halbe Kreisscheibe

$$K := \{z \in \mathbb{C} : |z - 2 - i| < 3,\ \mathrm{Re}\,(z) > 2\}$$

soll auf die obere Hälfte des Inneren des Einheitskreises ($|z| < 1$) transformiert werden. Wie geht das?



$|z-(2+i)| = 3$ Kreis $M = 2+i$ $R = 3$

$|z-(2+i)| < 3$ Inneres des Kreises

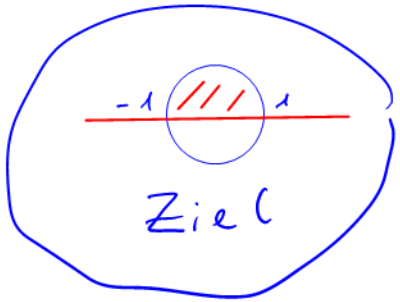
$f_1(z) = z - (2+i) = \hat{z}$

$f_2(\hat{z}) = \frac{1}{3}\hat{z} = \tilde{z}$

$f_3(\tilde{z}) = e^{i\frac{\pi}{2}}\tilde{z}$

$f(z) = e^{i\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}(z-(2+i))$

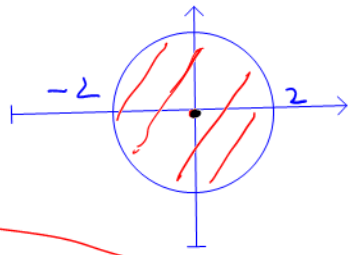
$= \frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}z - \frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}(2+i)$



Die Funktion $f : D \to \mathbb{C},\ w = f(z) := z^{-1}$

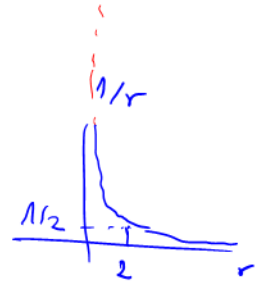
Punktrechnung $\longrightarrow$ wieder einfacher in Polarkoordinaten.

Beispiel 1: Bild von punktierter Kreisscheibe mit Radius 2 um den Ursprung



$$D := \{\, z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leq 2 \,\}$$

$$z = re^{i\phi}, \qquad 0 < r \leq 2,\ 0 \leq \phi < 2\pi$$

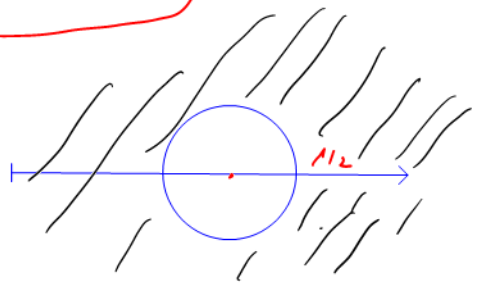


$$w = f(z) := z^{-1} = \frac{1}{re^{i\phi}} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{e^{i\phi}}$$

$$w = \frac{1}{r}e^{-i\phi} =: \rho e^{i\alpha} \qquad \rho \in \left[\tfrac{1}{2}, \infty\right[,\ -2\pi < \alpha \leq 0$$

$\rho \in ?$ $\quad \alpha \in ?$

$\rho = \frac{1}{r}$ $\quad \alpha = -\varphi$



Kreis $|z| = 2$ $\xrightarrow{\frac{1}{z}}$ Kreis $|z| = \frac{1}{2}$

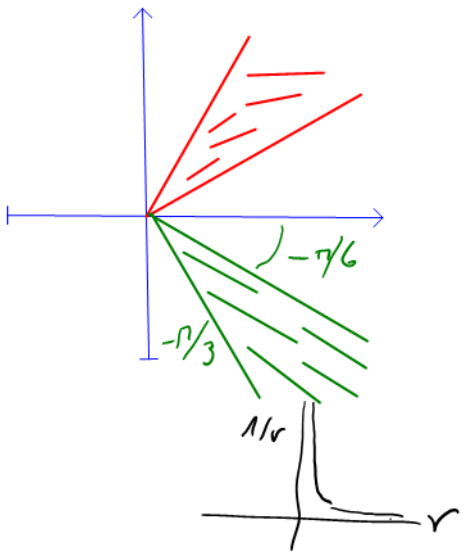
Beispiel 2: Bild des Sektors

$D := \{ z \in \mathbb{C} : z = re^{i\phi} : \phi \in]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}[, r \in \mathbb{R}^+ \}$

$z = re^{i\varphi}$ $\quad \frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\varphi}$ wie oben

$r \in (0, \infty) \Longrightarrow \frac{1}{r} \in (0, \infty)$

$\varphi \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}) \Longrightarrow -\varphi \in (-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6})$

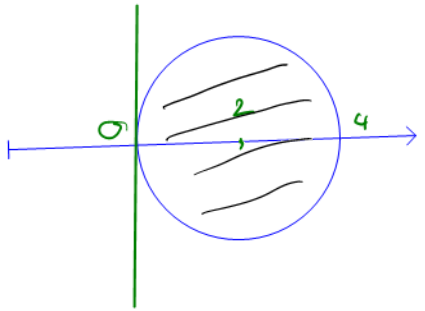


Beispiel 3:

$D =$ das Innere eines Kreises mit Radius 2 um $z_0 = 2$ ohne Null.

$z = 2 + 2e^{i\varphi}$ $\quad \varphi \in [0, 2\pi)$

$D =$ $\quad |z-2|^2 < 2^2$ $\quad |c|^2 = c \cdot \bar{c}$



Grenze $|z-2|^2 = (z-2)(\overline{z-2}) \doteq 4$

$\Longleftrightarrow (z-2)(\bar{z}-2) = z\bar{z} - 2\bar{z} - 2z + 4 \doteq 4$

Habe Gleichung für z

$z\bar{z} - 2\bar{z} - 2z = 0$ $\quad$ Suche w!

$\frac{1}{w} \cdot \frac{1}{\bar{w}} - 2\frac{1}{\bar{w}} - 2\frac{1}{w} = 0 \quad | \cdot w\bar{w}$

$w = \frac{1}{z}$ $\quad w \in ?$

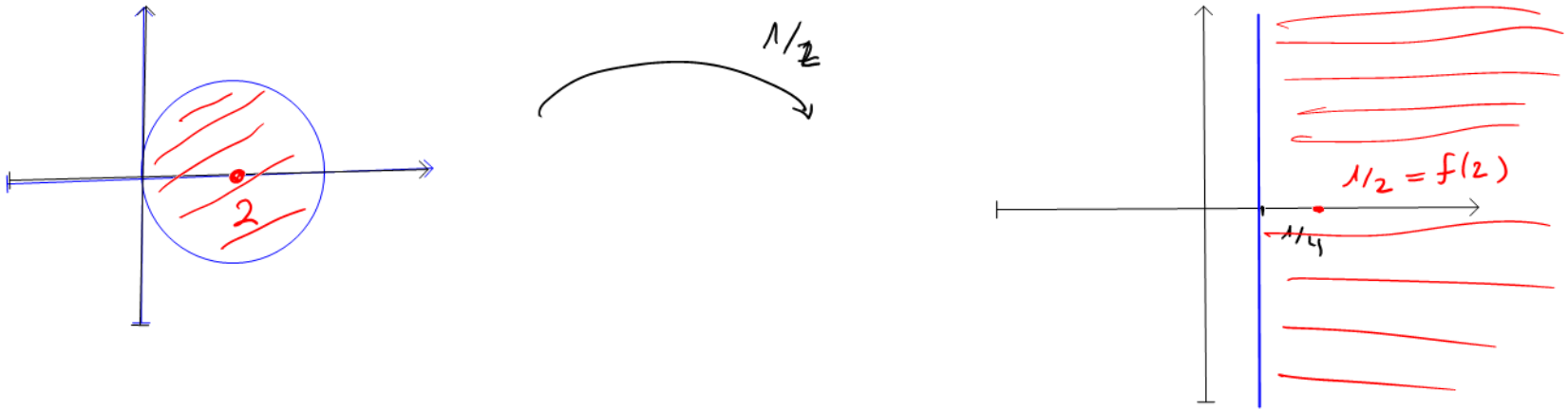
Ersetze $\bar{z}$ durch w-Ausdruck

Hier $z = \frac{1}{w}$

$$1 - 2w - 2\bar{w} = 0$$

$$1 - 2\underbrace{(w + \bar{w})}_{2\mathrm{Re}(w)} = 0 \iff 1 - 4\,\mathrm{Re}(w) = 0$$

$$\mathrm{Re}(w) = 1/4$$



H 3

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$|z - z_0|^2 = (z - z_0)\overline{(z - z_0)}$$

Natürliche Potenzen/Wurzeln

$$z = re^{i\varphi} \Longrightarrow z^n = r^n e^{in\varphi}$$

Umkehrung: $e^{i\alpha} = w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\varphi}{n}}$? **VORSICHT!!**

Beispiel 1:

$$e^{i\alpha} = (\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)) = \cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n}\right)$$

$$w = \sqrt[2]{i} \Longleftrightarrow w^2 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$w^2 = \rho^2 \cdot e^{i2\alpha} \stackrel{!}{=} 1^2 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \Longrightarrow \rho = 1$$

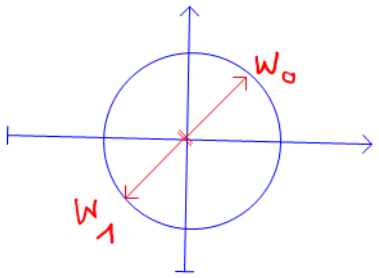
Anschaulich: w liegt auf dem Einheitskreis und wenn man den Winkel zu w verdoppelt landet man in i.

$\alpha = ?$ $\quad e^{i2\alpha} = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$\Updownarrow$$

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Zwei verschiedene Punkte der komplexen Zahlenebene.



Allgemein: $n \in \mathbb{N}, \quad z = re^{i\phi}, \quad w := z^{\frac{1}{n}}$

Suche alle n-ten Wurzeln aus z!

$$\rho \cdot e^{i\alpha} = w \overset{!}{=} |z|^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\phi}{n})}$$

$z^{1/n} = (re^{i\varphi})^{1/n}$

$= r^{\frac{1}{n}} (e^{i\varphi})^{\frac{1}{n}}$

$= r^{1/n} \, e^{i\frac{\varphi}{n}}$

$\rho = \sqrt[n]{r} = |z|^{1/n}$

$w^n = \rho^n e^{i\alpha n} \overset{!}{=} z = re^{i\varphi}$

$e^{i\alpha n} = e^{i\varphi} \iff n\alpha = \varphi + 2k\pi$

$\alpha = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$

$$w = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n})} \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$$

n paarweise verschiedene Punkte der $\mathbb{C}-$ Ebene

Hauptwert :

$$-\pi < \phi < \pi, \qquad z^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\phi}{n})}$$

z. B. $n = 2$ $\quad z^{\frac{1}{2}} = |z|^{1/2} e^{i\frac{\varphi}{2}}$ $\quad \frac{\varphi}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Der Hauptwert der zweiten Wurzel liegt also immer in der rechten Halbebene

$\sqrt{4} = 2$ nicht ± 2 und nicht -2

2^4 HM

Beispiel 2: Gesucht alle Lösungen von

Punktrechnung: schreibe um in Polar (vgl. Präsenzblatt 1)

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{\cos(\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{3})} z^4 \overset{!}{=} \underbrace{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{\cos(\frac{2\pi}{3})+i\sin(\frac{2\pi}{3})} \cdot 81$$

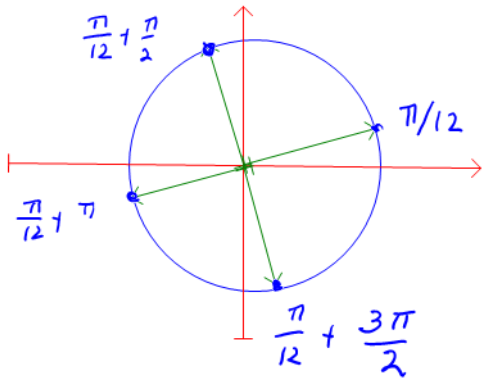
$$e^{i\frac{\pi}{3}} z^4 \overset{!}{=} 81 e^{\frac{i2\pi}{3}} \quad \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}} \quad \Longleftrightarrow \quad z^4 = 81 e^{i\frac{\pi}{3}} \quad (*)$$

$$|z^4| = |z|^4 = 81 \iff |z| = 3$$

beachte $|z^4| = 81 \cdot \underbrace{|e^{i\frac{\pi}{3}}|}_{1}$

$$\{\arg(z)\} = \{\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{4}, \frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{4}, \frac{\pi}{12}+\frac{6\pi}{4}, \cdots\}$$

Vier verschiedene Punkte der komplexen Zahlenebene.



$(*)$ $\arg(z^4) = 4 \cdot \arg(z)$

$= \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$\Longrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{3 \cdot 4} + \frac{2k\pi}{4}$

Beispiel 3: Der Keil Nächste HÜ

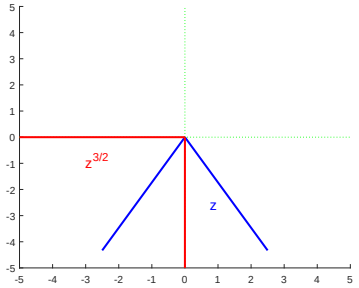
$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \; z = re^{i\phi}, \, r \in (0, \infty), \, -\frac{2\pi}{3} < \phi < -\frac{\pi}{3} \right\}$$

soll auf die obere linke Viertelebene $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(z) < 0, \mathrm{Im}\,(z) \; > 0\}$ abbildet werden.

Öffnungswinkel Urbild: $\frac{\pi}{3}$ und Öffnungswinkel Bild: $\frac{\pi}{2}$, also hoch $\frac{3}{2}$

Mit $\tilde{f}(z) = z^{\frac{3}{2}} = w$ gilt

$\arg(w) \in]-\frac{2\pi}{3} \cdot \frac{3}{2}, \, -\frac{\pi}{3} \cdot \frac{3}{2}[=]-\pi, \, -\frac{\pi}{2}[$

Der Öffnungswinkel stimmt jetzt. Es muss nur noch um $-\frac{\pi}{2}\,(+2k\pi)$ gedreht werden, also zum Beispiel

$$f(z) = e^{-i\frac{\pi}{2}} \cdot \tilde{f}(z) = e^{-i\frac{\pi}{2}} z^{\frac{3}{2}}$$
$$= -iz^{\frac{3}{2}}$$