Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. Hanna Peywand Kiani

SoSe ~~19~~ 21
09.07.2021

Klausurberatung Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Die ins Netz gestellten Unterlagen sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig und möglicherweise irreführend!

Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt nicht!

Die Aufzählung wichtiger Themen bedeutet NICHT den Ausschluss anderer Themen für die Klausur.

Absolut notwendige Techniken

- Einfache gewöhnliche DGL lösen, zum Beispiel
  - Separierbare (vgl. z. B. Charakteristiken Methode)
  - Lineare mit konstanten Koeffizienten (vgl. z. B. Wärmeleitungsgleichung)

$$\dot{y}(t) + \alpha y(t) = p_n(t) \cdot e^{\mu t}, \qquad p_n \text{ Polynom n-ten Gerades}$$

$y_h(t) = \gamma e^{-\alpha t}$

Ansatz: $y_p(t) = \gamma(t) e^{\alpha t}$ oder,
vorausgesetzt $-\alpha \neq \mu$: $y_p(t) = (d_0 + d_1 t + d_2 t^2 + \ldots + d_n t^n) \cdot e^{\mu t}$

$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

γ über Anfangswert bestimmen!

- Ganz einfache Integrale, partielle Integration

  Zum Beispiel für d'Alembert, Fourierkoeffizienten, Charakteristiken

- Fourier-Koeffizienten berechnen (Blätter 5 und 6)

- polar $< - - - >$ kartesisch (Blatt 4)

- Determinante/Eigenwerte von 2x2 Matrizen (Blatt 4)

Blatt 1:

P1: Lösungen Eigenwertaufgabe $y'' = \lambda y$, $y(0) = y(L) = 0$ WZ für Vorlesung

P2: Fourier-Reihen Werkzeug

H1: Leibnizregel für die Ableitung von Integralen Werkzeug für Vorlesung

H2: Verkehrsmodel, Kontinuitätsgleichung, Transpotgleichung $u_t - cu_x = 0$

Motivation

$\emptyset$

Blatt 2:

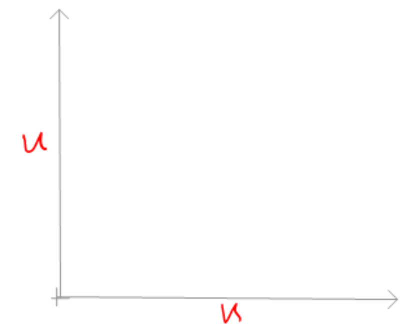
P1, P2, H1: Charakteristiken-Methode, AWA: $x \in \mathbb{R}$

xxx

$$1 \cdot u_t + a(x,t,u)u_x = b(x,t,u)$$

P3: Alte Klausuraufgabe, Verständnisfrage zu Charakteristiken. xxx

H2: Charakteristiken-Methode, Viertelebene. $\emptyset$



Blatt 3:

P1: Erhaltungsgleichung, Charakteristiken für
$u_t + (u+1)^2 u_x = 0$, $u(x,0)$ stetig. gute Übung

P2: Burgers Gleichung: zwei Verdünnungswellen, zwei Stoßwellen ×××

H1a: Burgers Gleichung: Verständnisfrage zu Burgers Gleichung. ∅

H1b: Sprungbedingung für $u_t + (f(u))_x = 0$, $f(u) \neq \frac{u^2}{2}$. ×××

H2a) Verdünnungswellen **und** Stoßwelle. $u_t + u u_x = 0$

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 0 \end{cases}$$

×××
Nur bis Verdünnung auf Stoß trifft
Nicht die "Kür"

H2b: Burgers Gleichung: Irreversibiltät mittels Zeichnen der Charakteristiken feststellen. ∅

××

H3: Verkehrsmodell, nicht konvexe Flussfunktion.

H3a: Kontinuitätsgleichung aufstellen $\emptyset$

H3b: Sind die Charakteristiken Geraden? xxx

H3c: Charakteristiken skizzieren xxx

H3d: Entropiebedingung $\emptyset$

Blatt 4:

P1: Transformation auf Diagonalform und Typ bestimmen (parabolisch, elliptisch, hyperbolisch)

nicht jetzt
aber eventuell
im WiSe

P2a) Harmonische Funktionen.
P2b) Rotationssymmetrische Lösung der Laplace-Gleichung auf Ring.
P2c) Mittelwerteigenschaft.

nicht jetzt
aber eventuell
im WiSe

H1) Entropielösung für $u_t + (f(u))_x = 0,\ f(u) \neq \frac{u^2}{2}$.
Stoß- und Verdünnungswelle.

×××

H2a) Typ (parabolisch, elliptisch, hyperbolisch) bestimmen.

nicht jetzt
aber eventuell
im WiSe

H2c) $u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \Longrightarrow u_t(kx, k^2 t) - u(kx, k^2 t)_{xx} = 0.$ $\emptyset$

Blatt 5:

P1a) ARWA Wärmeleitung, homogenisieren der Randdaten

P2b) ARWA Wärmeleitung, inhomogene DGl, homogene Randdaten
$\longrightarrow$ geschlossene Lösungsdarstellung $\longrightarrow$ Koeffizientenvergleich oder Fourier-Koeffizienten.

H1a) ARWA Wärmeleitung ($c = 4$), homogene Randdaten
$\longrightarrow$ geschlossene Lösungsdarstellung $\longrightarrow$ Fourier-Koeffizienten.

H1b) ARWA Wärmeleitung, homogenisieren der Randdaten
$\longrightarrow$ Inhomogene Aufgabe mit homogenen Randdaten
$\longrightarrow$ in zwei Aufgaben aufspalten: hom. DGL + inhom. Anfangswerte und inhom. DGL + homogene Anfangswerte.
Lief hier auf Koeffizientenvergleich hinaus.

H2) Wärmeleitung,Herleitung Lösungsansatz für Neumann-Randbedingungen

$\emptyset$

Blatt 6:

P1a) ARWA Wellengleichung, geschlossene Lösungsformel, Hier Fourier für $u(x,0)$ und Koeffizientenvergleich für $u_t(x,0)$. xxx

P1b) ARWA Wellengleichung, homogenisieren der Randdaten. xxx

P2) Laplace-Gleichung auf Rechteck: Eckdaten auf Null setzen $\emptyset$

H1) AWA Wellengleichung, inhomogen, Ansatz für Lösung der inhomogenen Differentialgleichunggegeben
Homogene Differentialgleichung: d'Alembert
Zusammensetzen.

nicht jetzt
aber eventuell
im WiSe

H2) ARWA Wellengleichung, homogenisieren der Randdaten. Danach geschlossene Lösungsformel verwenden. Fourier/Koeffizientenvergleich. xxx

H3b: Laplace-Gleichung auf Rechteck, nicht jetzt
Randwerte auf einer Kante $\neq 0$ aber eventuell im WiSe

In der Klausur: direkt die in Vorlesung/HÜ erarbeiteten Lösungsformeln verwenden!

Zusammenstellung einiger (nicht aller) geschlossener Lösungsformeln (ohne Gewähr, bitte vor der Klausur mit Vorlesung/Formelsammlung abgleichen!)

Wellengleichung:

A) AWA, homogen:

$\tilde{u}_{tt} - c^2 \tilde{u}_{xx} = 0$, $\tilde{u}(x,0) = f(x)$, $\tilde{u}_t(x,0) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $c > 0$

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2} \left[f(x+ct) + f(x-ct) \right] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\alpha)\, d\alpha$$

B) AWA, inhomogen:

$u_{tt} - c^2 u_{xx} = h(x,t)$, $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $c > 0$

$$u(x,t) = \tilde{u} + \hat{u} \qquad \tilde{u} \text{ wie in A)}$$

$$\hat{u}(x,t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x+c(s-t)}^{x-c(s-t)} h(\omega, s)\, d\omega\, ds$$

B) ARWA, homogene Differentialgleichung, homogene Randwerte:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \qquad x \in (0,L),\ t > 0,\ c > 0$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = w_0(x) \qquad x \in (0,L)$$

$$u(0,t) = 0 \qquad u(L,t) = 0 \qquad t > 0 \qquad \omega := \frac{\pi}{L}$$

$$u(x,t) \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \, \cos\left(ck\omega t\right) \ + \ B_k \, \sin\left(ck\omega t\right)\right] \, \sin\left(k\omega x\right)$$

Eventuell Koeffizientenvergleich

$$u(x,0) \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} A_k \, \sin\left(k\omega x\right) \stackrel{!}{=} u_0(x)$$

$$u_t(x,0) \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} \ ck\omega \cdot B_k \, \sin\left(k\omega x\right) \stackrel{!}{=} w_0(x)$$

möglich. Sonst:

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(\alpha) \sin(k\omega\alpha)\, d\alpha, \quad B_k = \frac{2}{ck\pi} \int_0^L w_0(\alpha) \sin(k\omega\alpha)\, d\alpha$$

bzw. $B_k = \dfrac{L}{ck\pi} b_k$ mit $b_k = \dfrac{2}{L} \displaystyle\int_0^L w_0(\alpha) \sin(k\omega\alpha)\, d\alpha,$

C) Inhomogene Differentialgleichung, **homogene** Randdaten

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = h(x,t) \qquad\qquad c > 0,\ x \in (0,L),\ t > 0$$

D) ARWA, inhomogene Randwerte:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = h(x,t), \qquad x \in (0,L),\ t > 0$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = v_0(x) \qquad x \in (0,L)$$

$$u(0,t) = f(t) \qquad u(L,t) = g(t) \qquad t > 0$$

Randwerte homogenisieren

$$w(x,t) = u(x,t) - f(t) - \frac{x}{L}(g(t) - f(t))$$

ergibt neue Aufgabe für w mit homogenen Randwerten.

Wärmeleitungsgleichung
Zusammenstellung geschlossener Lösungsformeln (ohne Gewähr, bitte vor der Klausur mit Vorlesung/Formelsammlung abgleichen!)

I) Wärmeleitungsgleichung, ARWA, homogen, homogene Randwerte

$$u_t - cu_{xx} = 0 \qquad c > 0,\ x \in (0, L),\ t > 0$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \qquad x \in [0, L],$$

$$u(0, t) = 0 \qquad t > 0,$$

$$u(L, t) = 0 \qquad t > 0,$$

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-c\omega^2 k^2 t} \sin(k\omega x) \qquad \omega = \frac{\pi}{L}$$

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\omega x) \stackrel{!}{=} u_0(x)$$ evtl. Koeffizientenvergleich

$$a_k = \frac{2}{L} \int_a^b u_0(x) \sin(k\omega x)\, dx$$ falls Koeff'nvergleich nicht möglich

II) Wärmeleitungsgleichung, ARWA, inhomogen, homogene Randwerte:

$$u_t - cu_{xx} = h(x,t), \qquad x \in (0,L),\ t > 0$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in (0,L)$$

$$u(0,t) = 0 \qquad u(L,t) = 0 \qquad t > 0$$

Entweder: zerlegen wie in HÜ5

$$\tilde{u}_t - c\tilde{u}_{xx} = 0 \qquad 0 < t,\ 0 < x < L,$$

$$\tilde{u}(x,0) = u_0(x) \qquad 0 \leq x \leq L,$$

$$\tilde{u}(0,t) = \tilde{u}(L,t) = 0 \qquad t > 0.$$

Also Typ I) und

$$\hat{u}_t - c\hat{u}_{xx} = h(x,t) \qquad 0 < t,\, 0 < x < L,$$

$$\hat{u}(x,0) = 0 \qquad 0 \le x \le L,$$

$$\hat{u}(0,t) = \hat{u}(L,t) = 0 \qquad t > 0.$$

$$\hat{u}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t)\, \sin(k\omega x) \qquad\qquad \omega = \frac{\pi}{L}$$

DGL: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (\dot{a}_k(t) + a_k(t)\,\frac{ck^2\pi^2}{L^2})\sin(k\omega x) \stackrel{!}{=} h(x,t)$ evtl. Koeffizientenvergleich

$\displaystyle\frac{da_k(t)}{dt}(t) + a_k(t)\,\frac{ck^2\pi^2}{L^2} = c_k(t), \quad a_k(0) = 0$ falls Koeff'nvergleich nicht möglich

$\displaystyle c_k(t) = \frac{2}{L}\int_0^L h(x,t)\, \sin(k\omega x)dx$ gewöhnliche Dgl's für die a_k

und dann summieren: $u = \hat{u} + \tilde{u}$

oder: direkt

$$u_t - cu_{xx} = h(x,t), \qquad x \in (0,L),\ t > 0$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in (0,L)$$

$$u(0,t) = 0 \qquad u(L,t) = 0 \qquad t > 0$$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t)\,\sin(k\omega x) \qquad \omega = \frac{\pi}{L}$$

$$\frac{da_k(t)}{dt}(t) + a_k(t)\,\frac{ck^2\pi^2}{L^2} = c_k(t), \quad a_k(0) = b_k$$

$$c_k(t) = \frac{2}{L}\int_0^L h(x,t)\,\sin(k\omega x)dx$$

$$b_k = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\,\sin(k\omega x)dx$$

III) Wärmeleitungsgleichung, ARWA, inhomogene Randwerte:

$$u_t - c\,u_{xx} = h(x,t), \qquad x \in (0,L),\ t > 0$$
$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in (0,L)$$
$$u(0,t) = f(t) \qquad u(L,t) = g(t) \qquad t > 0$$

Randwerte homogenisieren

$$v(x,t) = u(x,t) - f(t) - \frac{x}{L}(g(t) - f(t))$$

ergibt neue Aufgabe für v mit homogenen Randwerten.

Falls neue Dgl. homogen : Fall I).
Falls neue Dgl. inhomogen : Fall II).

Charakteristikenmethode

$$u_t(x,t) \,+\, a(x,t,u)\, u_x(x,t) \,=\, b(x,t,u)\,.$$

Hilfsproblem :

$$U_t \,+\, a \cdot U_x \,+\, b \cdot U_u \,=\, 0 \tag{1}$$

$$\frac{dt}{ds} \,=\, 1 \qquad \frac{dx}{ds} \,=\, a(x,t,u), \qquad \frac{du}{ds} \,=\, b(x,t,u)$$

oder (mit t als Parameter)

$$\frac{dx}{dt} \,=\, a(x,t,u)\,, \qquad \frac{du}{dt} \,=\, b(x,t,u). \tag{2}$$

Lösen/Integrieren liefert $C_1(x,t,u), C_2(x,t,u)$

Setze $C_2 = f(C_1)$

und besimme f mit Hilfe der Anfangsbedingung

Burgers und ähnliche Gleichungen, Verdünnungs- und Stoßwellen

$$u_t + (f(u))_x = 0\,.$$

$$\frac{dx}{dt} = f'(u)\,, \qquad \frac{du}{dt} = 0. \tag{3}$$

Charakteristikensteigung hängt nur von u ab

u ist konstant auf Charakteristik

Charakteristiken sind Geraden.

Oft sind Skizzen hilfreich

Für (Riemann Problem)

$$u_t + (f(u))_x = 0, (f \text{ streng konvex}), \qquad u(x,0) = \begin{cases} u_l & x \leq x_0 \\ u_r & x > x_0 \end{cases}$$

Entropielösung:

- Im Fall $u_l > u_r$: Stoßfront (Unstetigkeitskurve) $s(t)$ mit:

  Rankine- Hugoniot- Sprungbedingung:

$$\boxed{\dot{s}(t) = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} =: \frac{[f]}{[u]}}$$

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & x \leq s(t), \\ u_r & x > s(t)\,. \end{cases}$$

$u_l = 10$

$u_r = 0$

$f(u) = \frac{u^4}{4}$

$$\frac{\frac{u_l^4}{4} - \frac{u_r^4}{4}}{u_l - u_r} = \frac{1}{4}\,\frac{u_l^4 - u_r^4}{u_l - u_r}$$

$$\dot{s}(t) = \frac{10^4 - 0^4}{10 - 0} = 10^3$$

- Im Fall $u_l < u_r$: Verdünnungswelle. Mit $g = (f')^{-1}$

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & x \leq x_0 + f'(u_l)\cdot t, \\ g\left(\dfrac{x - x_0}{t}\right) & x_0 + f'(u_l)\cdot t < x < x_0 + f'(u_r)\cdot t \\ u_r & x \geq x_0 + f'(u_r)\cdot t\,. \end{cases}$$

Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg | SoSe 21
Dr. Hanna Peywand Kiani | 09.07.2021

Klausurberatung Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Die ins Netz gestellten Unterlagen sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig.

Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT!

Die Aufzählung wichtiger Themen bedeutet NICHT den Ausschluss anderer Themen für die Klausur.

Blatt 1: (Keine Hausaufgaben)

P1, P2: polar $\longleftrightarrow$ kartesisch, Punkte markieren. WZ

P3: Geometrische Bedeutung von Betrag, konjugiert, WZ
Beschreibung von Kreisen/Abständen.

$|z - z_0| = r$

$|z - 0| = |z| = 3$

Wichtig für

Laurent-Reihen

Mobius

Residuensatz

P4: Beschreibung von Streifen, Ringen, Sektoren mit Formeln. WZ

Blatt 2:

Geometrische Bedeutung von Multiplikation, Addition, Potenzen, Exponentialfunktionen $(z^n, 1/z, \exp)$, Lösen von Gleichungen

P1: Bilder von Rechtecken, Ringteilen, Geradenstücken unter oben genannten Funktionen

xxx

P2 und H1: Gleichungen mit oben genannten Funktionen lösen. xx wz

H2: Alternative Kreisbeschreibung $z\bar{z} - c\bar{z} - \bar{c}z + c\bar{c} = R^2$. $\emptyset$

H3) a-b) Bilder von Strahl, Gerade, Kreis unter $1/z$. Vorbereitung Mobius

H3) c) Nachweis Kreis $\xrightarrow{\frac{1}{z}}$ Kreis inzwischen klar durch Möbius $\emptyset$

Blatt 3:

P1) Exponentialfunktion:
P1) a) Gleichung lösen.
P1) b) Bild von Rechteck. xxx

P2) (Hauptzweig der) Logarithmusfunktion:
P1) a) Bild von Teil eines Rings. xxx
P1) b-c) Eigenschaften nachweisen, Fehler in Rechnung finden. $\emptyset$

H1) Streifen auf vorgegebenen Sektor abbilden, f gesucht, Multiplikation (Drehen + skalieren), Potenzieren (Sektorwinkel anpassen), $\exp$

f und D werden gegeben
f(D) wird gesucht

H2) Keil unter vorgegebenem f (Kombi aus $\ln$, Multiplizieren, Potenzieren, Addieren) abbilden. xxx

Alte Klausuraufgabe

Blatt 4:

P1: Standard Möbius-Transformation, T gegeben. Alte Klausuraufgabe. ×××

Eigenschaften Möbius-Transf.: Was geht und was nicht. nicht jetzt
eventuell im WiSe

P2) a) Drei Punktepaare gegeben. Möbius-Transformationsvorschrift finden, $T(z) = ?$ ×××

z. B. $T(-i) = 2$

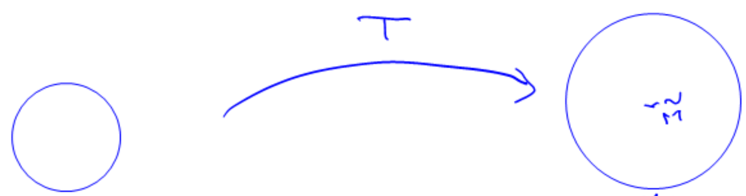
$T(i) = 0$

$T(2i) = 1/4$

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

$a, b, c, d = ?$

P2) b) Kreisymmetrie nutzen. $\emptyset$



$T^{-1}(\tilde{M}) = -4i$

$T^{-1}(\infty) = ?$

H1) T gegeben. Bilder von Mengen bestimmen. ×××

H2) Potentialproblem (Hyperbel, Ellipse auf strahlen/Kreise)/Joukowski $\emptyset$

Blatt 5:

P1) a) Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen Kartesisch.

gut als kleine Aufgabe evtl. im Wise

P1) b) (Konjugiert) Harmonische Funktionen.
Teil iii) in z umschreiben.

P2) Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen polar

H1) a-c) Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen,
d) Winkeltreue/ Winkel zwischen Tangenten an Kurven. $\emptyset$

H2) Ebene Potentialprobleme, konforme Abbildung, Gebiet außerhalb zweier Kreise auf Ringgebiet. $\emptyset$

Blatt 6:

P1: CIS, CIF

xxx

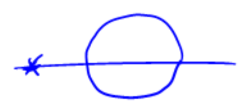
inzwischen eventuell Residuensatz einfacher

P2: Konvergenzbereich Taylor-Reihe, Vorbereitung für Laurent-Reihen

H1) a) Kurvenintegrale direkt oder mit Stammfunktion x kleine Aufgabe
H1) b) CIS, CIF
inzwischen: Residuensatz verwenden

xxx

H2a) i) $e^z = i$ lösen + CIS $\frac{1}{e^z - i}$



$\frac{g(z)}{\text{Polynom}}$

ii) Maximumprinzip

H2b) Verschiedene Werte, die das Integral einer Funktion entlang xxx
einfach geschlossener Kurve annehmen kann.

uml $\Gamma(i) = 1$

uml $\Gamma(-i) = -1$

$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \left[\operatorname{Res} f(i) \cdot 1 + \operatorname{Res} f(-i)\,(-1) \right]$

$\pm i$ einzige isolierte Singularitäten von f in/auf Γ

Blatt 7:

P1) Isolierte Singularitäten, Klassifikation, Residuen.

XXX
–
XXX

P2) Integrale über Residuensatz

P3) Laurentreihe im richtigen Ring: $z_0 \neq 0$, Potenzen von $z - z_0$ abspalten, Rest entwickeln ohne PBZ.

$\frac{1}{(z-z_0)^k} \cdot \underbrace{\frac{1}{z-z_1}}$

geometrische Reihe im richtigen Ring

H1) Isolierte Singularitäten,
Klassifikation mit Hilfe von (Taylor-)Reihen PBZ

XX

H2)a) Berechnung von Laurent-Reihe im richtigen Ring mit Cosinus-Reihe.

XX

Wie viele Reihen, in welchen Ringen

H2)a) Berechnung von Laurent-Reihe im richtigen Ring mit PBZ und $z_0 = 0$

$f(z) = \frac{(z-z_3)}{(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{\operatorname{Res} f(z_1)}{z-z_1} + \frac{\operatorname{Res} f(z_2)}{z-z_2}$ $\quad \operatorname{Res} f(z_1) = \frac{z-z_3}{z-z_2}\Big|_{z=z_1} = \frac{z_1-z_3}{z_1-z_2}$

$z_1, z_2 \neq z_0$

H3) Alte Klausuraufgabe,
Isolierte Singularitäten, Klassifikation,
Residuen, PBZ,
Laurent- Reihe im richtigen Ring.

XXX

Integrale

Isolierte Singularitäten von

$$f(z) = \frac{g(z)}{p(z)}$$

$g(z)$ analytisch in z^*-Umgebung

$p(z)$ Polynom = Nullstellen vom Nenner

z^* k-fache Nullstelle vom Nenner

$g(z^*) \neq 0$

$\downarrow$

z^* k-facher Pol

$$\operatorname{Res} f(z^*) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z^*} \left[(z-z^*)^k f(z) \right]^{(k-1)}$$

$f = \frac{p}{q}$

weitere Regel für Pol 1. Ord.

z_0 einfache Nennernullstelle

Also z_0 Pol 1. Ord.

$p(z_0) \neq 0$,

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

$g(z^*) = 0$

Bei $\frac{\text{Polynom}}{\text{Polynom}}$ kürzen, neu entscheiden

sonst $f(z) = \frac{1}{(z-z^*)^k} \underbrace{\frac{g(z)}{\tilde{p}(z)}}_{q(z)}$

analytisch nahe z^*

$\to$ Taylor möglich

$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{(z-z^*)^k} \left[q(z^*) + q'(z^*)(z-z^*) + \frac{q''(z^*)}{2!}(z-z^*)^2 + \dots \right]}$$

Falls $-m$ niedrigste Potenz von $(z-z^*) \to z^*$ Pol m-ter Ordnung.

$-m \geq 0 \to z^*$ hebbar

$\operatorname{Res} f(z^*) = 0$