Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2020**
Prof. Dr. A. Iske
Dr. K. Rothe ©

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 6

Aufgabe 21:

Man bestimme die Laurententwicklung der folgenden Funktionen und gebe jeweils den Koeffizienten a_{-1} der Reihe an:

a) $f(z) = \dfrac{\exp(z-2)}{z-2}$ im Punkt $z_0 = 2\,,$

b) $f(z) = \dfrac{z - \sin z}{z^7}$ im Punkt $z_0 = 0\,,$

c) $f(z) = z^2 \cosh\left(\dfrac{1}{z+1}\right)$ im Punkt $z_0 = -1\,.$

Lösung:

a) Für $|z-2| > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{\exp(z-2)}{z-2} = \frac{1}{z-2}\left(1 + \frac{z-2}{1!} + \frac{(z-2)^2}{2!} + \frac{(z-2)^3}{3!} + \cdots\right)\\
&= \frac{1}{z-2} + 1 + \frac{z-2}{2!} + \frac{(z-2)^2}{3!} + \frac{(z-2)^3}{4!} + \cdots\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2)^{n-1}}{n!} \quad \Rightarrow \quad a_{-1} = 1
\end{aligned}$$

b) Einzige Singularität von f ist der Entwicklungspunkt $z_0 = 0$. Für $|z| > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{z - \sin z}{z^7} = \frac{1}{z^7}\left(z - \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} \mp \cdots\right)\right)\\
&= \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^4} - \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{z^2} + \frac{1}{7!} - \frac{z^2}{9!} \pm \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} z^{2n-6}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad a_{-1} = 0$$

c)

$$\begin{aligned}
f(z) &= z^2 \cosh\left(\frac{1}{z+1}\right) = ((z+1)-1)^2 \cosh\left(\frac{1}{z+1}\right) \\
&= ((z+1)^2 - 2(z+1) + 1)\left(1 + \frac{1}{2!(z+1)^2} + \frac{1}{4!(z+1)^4} + \cdots\right) \\
&= (z+1)^2 - 2(z+1) + \frac{3}{2} - \frac{1}{z+1} + \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}\right)\frac{1}{(z+1)^2} \\
&\quad - \frac{2}{4!(z+1)^3} + \left(\frac{1}{4!} + \frac{1}{6!}\right)\frac{1}{(z+1)^4} \cdots \\
&= (z+1)^2 - 2(z+1) + \frac{3}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k)!}(z+1)^{1-2k} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2k)!} + \frac{1}{(2(k+1))!}\right)(z+1)^{-2k} \quad \Rightarrow \quad a_{-1} = -1
\end{aligned}$$

Aufgabe 22:

Für die folgenden Funktionen

a) $f(z) = \dfrac{z^2+z-2}{z^3-2z^2}$,

b) $f(z) = \dfrac{1+z-\exp(z)}{z^4}$,

c) $f(z) = \cosh\dfrac{1}{z} - \sinh\dfrac{1}{z}$,

d) $f(z) = \dfrac{z-\pi}{\sin z}$

bestimme man:

Lage und Art der (endlichen) Singularitäten, die zugehörigen Residuen und die ersten vier (nichtverschwindenden) Summanden der Laurentreihe um $z = 0$, die für große z konvergiert.

Lösung:

a) Die Singularitäten von

$$f(z) = \frac{z^2+z-2}{z^3-2z^2} = \frac{(z+2)(z-1)}{z^2(z-2)} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z-2}$$

sind gegeben durch die Nennernullstellen

$$z_1 = 2\,, \quad z_2 = 0\,.$$

Da z_k keine Zählernullstellen sind, ist $z_1 = 2$ Pol 1. Ordnung und $z_2 = 0$ Pol 2. Ordnung.

$$\text{Res}\,(f; z_1) = \left.\frac{z^2+z-2}{(z^3-2z^2)'}\right|_{z=z_1} = \left.\frac{z^2+z-2}{3z^2-4z}\right|_{z=2} = 1\,,$$

$$\begin{aligned}
\text{Res}\,(f; z_2) &= \frac{1}{1!}\left.\left(z^2\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z-2}\right)\right)'\right|_{z=0} = \left.\left(1+\frac{z^2}{z-2}\right)'\right|_{z=0} \\
&= \left.\frac{2z(z-2)-z^2}{(z-2)^2}\right|_{z=0} = 0
\end{aligned}$$

Die Laurent-Entwicklung im Außengebiet $|z| > 2$ ergibt sich durch:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-2/z} \\
&= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}+\frac{8}{z^3}+\cdots\right) \\
&= \frac{1}{z} + \frac{3}{z^2} + \frac{4}{z^3} + \frac{8}{z^4} + \cdots
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1+z-\exp(z)}{z^4} = \frac{1}{z^4}\left(1+z-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right) \\ &= -\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z}-\frac{1}{4!}-\frac{z}{5!}-\cdots \end{aligned}$$

Die einzige Singularität $z_0 = 0$ ist also Pol 2. Ordnung mit

$$\text{Res }(f; z_0) = a_{-1} = -\frac{1}{3!}\,.$$

c)
$$\begin{aligned} f(z) &= \cosh\frac{1}{z}-\sinh\frac{1}{z} \\ &= \frac{1}{2}\left(\exp\left(\frac{1}{z}\right)+\exp\left(-\frac{1}{z}\right)\right)-\frac{1}{2}\left(\exp\left(\frac{1}{z}\right)-\exp\left(-\frac{1}{z}\right)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{(-1)^n}{n!}}_{=:a_n}\frac{1}{z^n} = 1-\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}-\frac{1}{6z^3}+\cdots \end{aligned}$$

Die einzige Singularität $z_0 = 0$ ist also wesentlich mit

$$\text{Res }(f; z_0) = a_{-1} = -1\,.$$

d) Die Singularitäten von $f(z) = \dfrac{z-\pi}{\sin z}$ ergeben sich aus:

$$\begin{aligned} 0 = \sin z &= \frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right) = -\frac{i}{2}\left(e^{-y+ix}-e^{y-ix}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-ie^{-y}(\cos x+i\sin x)+ie^{y}(\cos x-i\sin x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sin x(e^y+e^{-y})+i\cos x(-e^{-y}+e^y)\right) \\ &= \sin x\cosh y+i\cos x\sinh y \end{aligned}$$

Alle Lösungen sind gegeben durch $x = k\pi$ und $y = 0$, also durch die bereits bekannten reellen Nullstellen $z_k = k\pi$.

Diese Nennernullstellen sind einfach, denn es gilt

$$(\sin)'(k\pi) = \cos k\pi = (-1)^k \neq 0.$$

Die einzige (einfache) Zählernullstelle ist $z_1 = \pi$. Damit ist z_1 hebbare Singularität und alle anderen $z_{k\neq 1}$ sind Pole 1.Ordnung.

Für die Residuen ergibt sich

$$\text{Res }(f; z_1) = 0 \quad \text{und} \quad \text{Res }(f; z_{k\neq 1}) = \frac{k\pi-\pi}{(\sin)'(k\pi)} = \frac{(k-1)\pi}{(-1)^k}\,.$$

Eine für alle z mit $|z| > R$ konvergente Laurent-Reihe existiert nicht, da sich die Singularitäten im Unendlichen häufen.

Aufgabe 23:

Gegeben sei die Funktion

$$f(z) = \frac{32}{z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 16z + 16} \, .$$

a) Man bestimme mit Hilfe von Laurent-Reihenentwicklungen die Partialbruchzerlegung von f .

b) Man berechne mit Hilfe des Residuensatzes das Integral

$$\oint_c f(z)\, dz$$

für den Kreis $c: \; |z + 2 - 2i| = 3$.

Lösung:

a) Aus der Faktorisierung

$$z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 16z + 16 = (z^2 + 4)(z + 2)^2 = (z + 2i)(z - 2i)(z + 2)^2$$

ergeben sich die Nennernullstellen

$$z_0 = -2i \, , \quad z_1 = 2i \, , \quad z_2 = -2 \, .$$

Damit sind z_0 und z_1 Pole 1. Ordnung und z_2 ist Pol 2. Ordnung. Der Hauptteil der Laurententwicklung in z_k , $k = 0, 1$ besitzt damit die Form

$$h(z, z_k) = \frac{a_{-1,k}}{z - z_k} \, , \quad \text{wobei} \quad a_{-1,k} = \operatorname{Res}(f(z); z_k)$$

gilt. Für $z_0 = -2i$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f(z); -2i) &= \left. \frac{32}{(z - 2i)(z + 2)^2} \right|_{z=-2i} = \frac{32}{-4i(-2i + 2)^2} \\ &= \frac{32}{4i \cdot 8i} = -1 \end{aligned}$$

Zum gleichen Ergebnis führt die Taylor-Reihenentwicklung des holomorphen Anteils von f :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z + 2i} \cdot \underbrace{\frac{32}{(z - 2i)(z + 2)^2}}_{= g_1(z), \, (\text{holom.})} \\ &= \frac{1}{z + 2i} (g_1(-2i) + g_1'(-2i)(z + 2i) + \cdots) \end{aligned}$$

mit $g_1(-2i) = \operatorname{Res}(f(z); -2i) = -1$. Insgesamt erhält man also

$$f(z) = \underbrace{-\frac{1}{z+2i}}_{=h(z,-2i)} + \underbrace{g_1'(-2i) + \cdots}_{\text{Nebenteil}}$$

Für $z_1 = 2i$ ergibt sich entsprechend

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-2i} \cdot \underbrace{\frac{32}{(z+2i)(z+2)^2}}_{=g_2(z),\,(\text{holom.})} \\ &= \frac{1}{z-2i}(g_2(2i) + g_2'(2i)(z-2i) + \cdots) \end{aligned}$$

mit $g_2(2i) = \operatorname{Res}(f(z); 2i) = -1$. Insgesamt erhält man also

$$f(z) = \underbrace{-\frac{1}{z-2i}}_{=h(z,2i)} + \underbrace{g_2'(2i) + \cdots}_{\text{Nebenteil}}$$

Für den Pol 2. Ordnung $z_2 = -2$ erhält man den Hauptteil der Laurent-Reihe um z_2 über die Taylor-Reihenentwicklung des holomorphen Anteils von f:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z+2)^2} \cdot \underbrace{\frac{32}{z^2+4}}_{=g_3(z),\,(\text{holom.})} \\ &= \frac{1}{(z+2)^2}\left(g_3(-2) + g_3'(-2)(z+2) + \frac{1}{2}g_3''(-2)(z+2)^2 + \cdots\right) \end{aligned}$$

Nach kurzer Rechnung erhält man

$$g_3(-2) = 4\,, \quad g_3'(-2) = 2 \;=\; (\operatorname{Res}(f(z); -2))$$

$$\Rightarrow \quad f(z) = \underbrace{\frac{4}{(z+2)^2} + \frac{2}{z+2}}_{=h(z,-2)} + \underbrace{g_3''(-2)/2 + \cdots}_{\text{Nebenteil}}$$

Die komplexe Partialbruchzerlegung lautet deshalb:

$$f(z) = h(z,-2i) + h(z,2i) + h(z,-2) = -\frac{1}{z+2i} - \frac{1}{z-2i} + \frac{4}{(z+2)^2} + \frac{2}{z+2}\,.$$

Als reelle Partialbruchzerlegung ergibt sich:

$$f(z) = -\frac{2z}{z^2+4} + \frac{4}{(z+2)^2} + \frac{2}{z+2}\,.$$

b) Von den Singularitäten von f

$$z_0 = -2i\,, \quad z_1 = 2i\,, \quad z_2 = -2\,.$$

liegen nur z_1 und z_2 innerhalb von c. Damit ergibt sich nach dem Residuensatz

$$\oint_c \frac{32}{z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 16z + 16}\, dz \;=\; 2\pi i\,(\operatorname{Res}(f; 2i) + \operatorname{Res}(f; -2)) = 2\pi i$$

Aufgabe 24:

Man berechne unter Verwendung des Residuenkalküls die folgenden Integrale

a) $$\int_0^\infty \frac{1}{x^{5/2} + 13x^{3/2} + 36x^{1/2}}\, dx\,,$$

b) $$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos x}\, dx\,,$$

c) $$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^4 + 10x^2 + 9}\, dx\,,$$

d) $$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(3x)}{x^2 - 6x + 10}\, dx\,.$$

Lösung:

a)
$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{1}{x^{5/2} + 13x^{3/2} + 36x^{1/2}}\, dx \\
=\;& \int_0^\infty \frac{dx}{x^{1/2}(x^2+13x+36)} = \int_0^\infty \frac{dx}{x^{1/2}(x+4)(x+9)} \\
=\;& \frac{2\pi i}{1-e^{-2\pi i/2}}\left(\operatorname{Res}\left(\frac{1}{x^{1/2}(x+4)(x+9)};-4\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{x^{1/2}(x+4)(x+9)};-9\right)\right) \\
=\;& \pi i\left(\frac{1}{\sqrt{-4}(-4+9)} + \frac{1}{\sqrt{-9}(-9+4)}\right) = \frac{\pi}{5}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{30}
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos x}\, dx \;&=\; \oint_{|z|=1} \frac{1}{2+(z+1/z)/2}\,\frac{dz}{iz} = \frac{2}{i}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+4z+1} \\
&=\; \frac{2}{i}\oint_{|z|=1} \underbrace{\frac{1}{(z+2-\sqrt{3})(z+2+\sqrt{3})}}_{=f(z)}\, dz \\
&=\; 2\pi i\cdot\frac{2}{i}\cdot\ \operatorname{Res}\left(f;-2+\sqrt{3}\right) \\
&=\; 4\pi\cdot\frac{1}{-2+\sqrt{3}+2+\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

c)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+10x^2+9}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{(x+i)(x-i)(x+3i)(x-3i)}}_{=f(x)}\,dx \;=\; 2\pi i\,(\mathrm{Res}(f;i)+\mathrm{Res}(f;3i))$$
$$= 2\pi i\left(\frac{1}{(i+i)(i^2+9)} + \frac{1}{((3i)^2+1)(3i+3i)}\right) \;=\; \pi\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{(-8)\cdot 3}\right) \;=\; \frac{\pi}{12}$$

d)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(3x)}{x^2-6x+10}\,dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{e^{3ix}}{(x-3)^2+1}\right)\,dx$$
$$= \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{e^{3ix}}{(x-(3+i))(x-(3-i))}}_{=f(x)}\,dx\right)$$
$$= \mathrm{Re}\,(2\pi i\ \mathrm{Res}(f;3+i)) \;=\; \mathrm{Re}\left(2\pi i\,\frac{e^{3i(3+i)}}{3+i-(3-i)}\right)$$
$$= \mathrm{Re}\left(\pi e^{-3+9i}\right) = \pi e^{-3}\cos 9$$