Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2020**
Prof. Dr. A. Iske
Dr. K. Rothe ©

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 5

Aufgabe 17:

Man berechne mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes bzw. der Cauchyschen Integralformel die folgenden Kurvenintegrale, falls diese erklärt sind. Alle auftretenden Kurven werden einmal positiv orientiert durchlaufen.

a) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z-2}\,dz\,,$ b) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{1}{z^2-4}\,dz\,,$ c) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^2-1}{z+1}\,dz\,,$ d) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^2+1}{z+1}\,dz\,,$

e) $\displaystyle\oint\limits_{c_{1,2}} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2}\,dz,$ $c_1 : |z+2| = 2,$ $c_2 : |z-1.5| = 2,$ f) $\displaystyle\oint\limits_{|z+1|=2} \frac{2z+1}{z^2+3z+2}\,dz\,.$

Lösung:

a) Die Singularität $z_1 = 2$ liegt nicht im Kreis $|z| = 1$.

Cauchyscher Integralsatz:

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z-2}\,dz = 0$$

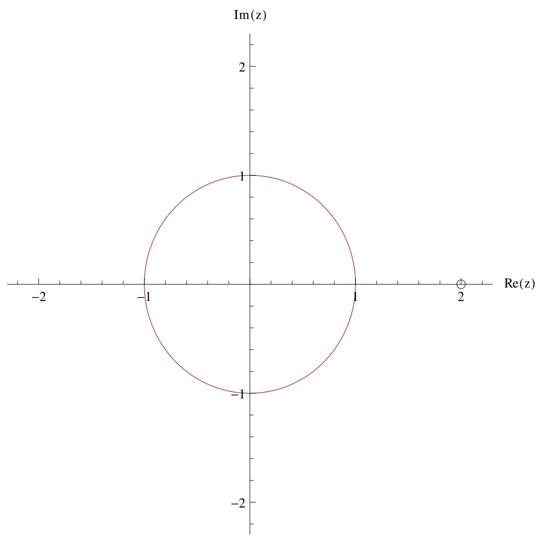

Bild 17 a): Kurve $|z| = 1$

b)

$$0 = z^2 - 4 = (z+2)(z-2)$$

Die Singularitäten $z_{1,2} = \pm 2$ liegen auf dem Kreis $|z| = 2$.

Damit ist das Integral nicht erklärt.

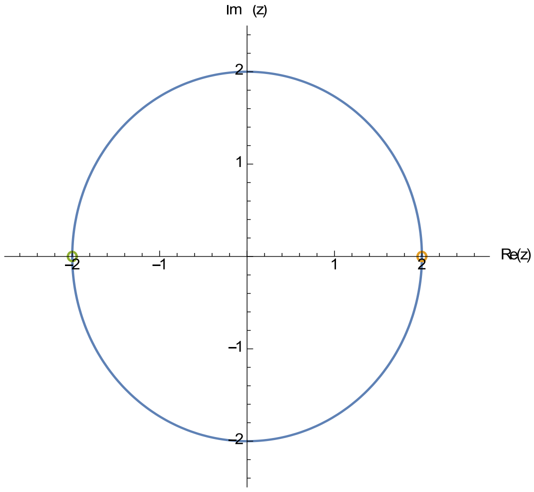

Bild 17 b): Kurve $|z| = 2$

c)

Die hebbare Singularität $z_1 = -1$ liegt im Kreis $|z| = 2$.

Cauchyscher Integralsatz für die holomorph ergänzte Funktion:

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^2-1}{z+1}\,dz = \oint_{|z|=2} z - 1\,dz = 0$$

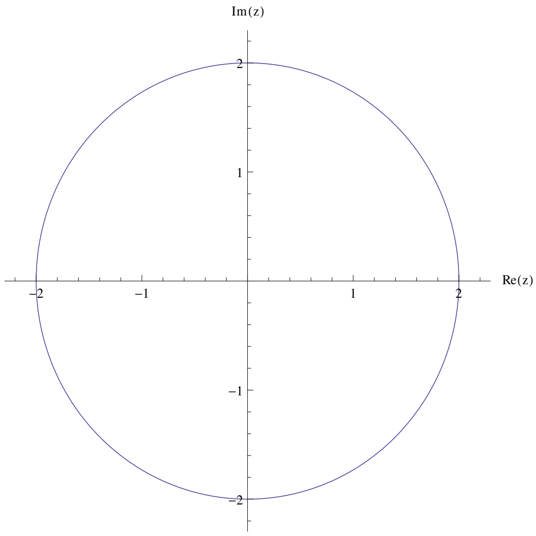

Bild 17 c): Kurve $|z| = 2$

d)

Die Singularität $z_1 = -1$ liegt im Kreis $|z| = 2$.

Cauchysche Integralformel:

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^2+1}{z+1}\,dz = 2\pi i((-1)^2+1) = 4\pi i$$

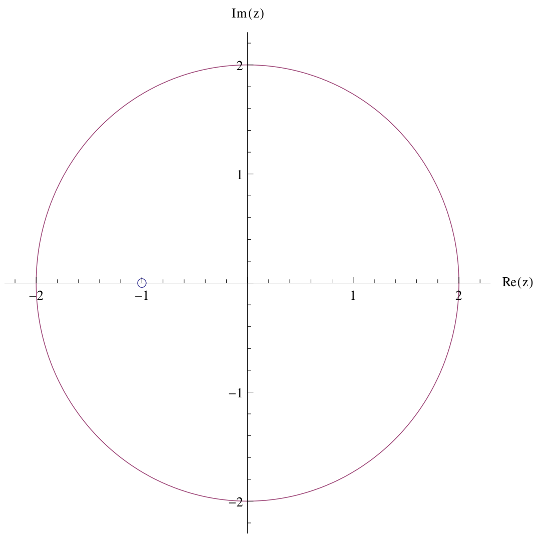

Bild 17 d): Kurve $|z| = 2$

e) $\dfrac{\cos z}{z^2-\pi^2} = \cos z \cdot \dfrac{1}{z+\pi} \cdot \dfrac{1}{z-\pi}$,

Singularitäten bei $z_0 = -\pi$ und $z_1 = \pi$

$c_1 : \; |z+2| \; = \; 2$ umschließt nur die isolierte Singularität $z_0 = -\pi$

$$f(z) = \cos z \cdot \frac{1}{z-\pi} \quad \Rightarrow \quad f(-\pi) = \cos(-\pi) \cdot \frac{1}{-\pi-\pi} = \frac{1}{2\pi}$$

$$\oint\limits_{c_1} \frac{f(z)}{z+\pi}\, dz = \frac{2\pi i f(-\pi)}{0!} = \frac{2\pi i}{2\pi} = i$$

$c_2 : \; |z-1.5| \; = \; 2$ umschließt nur die isolierte Singularität $z_1 = \pi$

$$g(z) = \cos z \cdot \frac{1}{z+\pi} \quad \Rightarrow \quad g(\pi) = \cos(\pi) \cdot \frac{1}{\pi+\pi} = -\frac{1}{2\pi}$$

$$\oint\limits_{c_2} \frac{g(z)}{z-\pi}\, dz = \frac{2\pi i g(\pi)}{0!} = \frac{2\pi i}{-2\pi} = -i$$

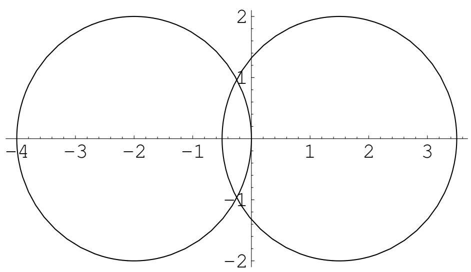

Bild 17 e): Kurven $c_1 : \; |z+2| \; = \; 2$ und $c_2 : \; |z-1.5| \; = \; 2$

f) $0 = z^2 + 3z + 2 = (z+1)(z+2)$

Die Singularitäten $z_1 \; = \; -1, z_2 \; = \; -2$
liegen im Kreis $|z+1| = 2$.

Partialbruchzerlegung

$$\frac{2z+1}{z^2+3z+2} = \frac{3}{z+2} - \frac{1}{z+1}$$

$$\oint\limits_{|z+1|=2} \frac{2z+1}{z^2+3z+2}\, dz$$

$$= \oint\limits_{|z+1|=2} \frac{3}{z+2} - \frac{1}{z+1}\, dz$$

$$= \oint\limits_{|z+1|=2} \frac{3}{z+2}\, dz - \oint\limits_{|z+1|=2} \frac{1}{z+1}\, dz$$

$$= 3 \cdot 2\pi i - 2\pi i = 4\pi i$$

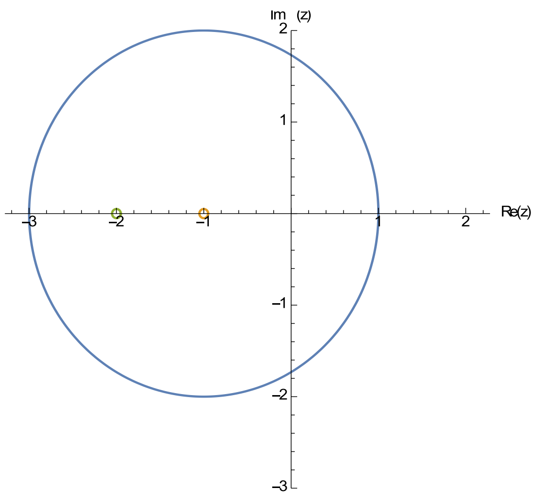

Bild 17 f): Kurve $|z+1| \; = \; 2$

Aufgabe 18:

Man berechne mit Hilfe der verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel die folgenden Kurvenintegrale (alle auftretenden Kurven seien positiv orientiert):

a) $\displaystyle\oint\limits_{|z+i|=1} \frac{\cos z}{(z+i)^2}\,dz\,,$ b) $\displaystyle\oint\limits_{|z-2|=1} \sin z + \frac{\ln z}{(z-2)^2}\,dz\,,$

c) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=5} \frac{\sin z}{(z-\pi)^4}\,dz$, d) $\displaystyle\oint\limits_{|z+i|=2} \frac{\cos z}{z^3}\,dz$, e) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4} \frac{\cosh z}{(z-i\pi)^5}\,dz\,.$

Lösung:

a) Die Singularität $z_1 = -i$ liegt im Kreis $|z+i| = 1$.

verallgemeinerte Causchysche Integralformel:

$$\oint\limits_{|z+i|=1} \frac{\cos z}{(z+i)^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1!}\,(\cos z)'\,|_{z=-i} = 2\pi i \sin i = 2\pi i \frac{e^{i^2}-e^{-i^2}}{2i} = \pi\left(e^{-1}-e\right)$$

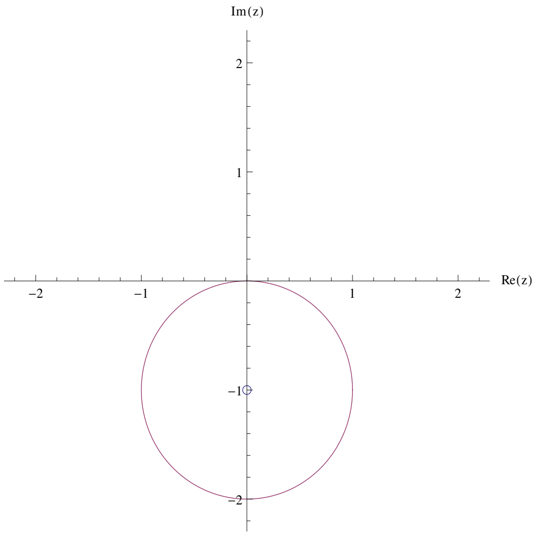

Bild 18 a): Kurve $|z+i| = 1$

b)

Die Singularität des zweiten Summanden im Integranden $z_1 = 2$ liegt im Kreis $|z-2| = 1$.

Cauchyscher Integralsatz und verallgemeinerte Cauchysche Integralformel:

$$\oint\limits_{|z-2|=1} \sin z + \frac{\ln z}{(z-2)^2}\,dz = \oint\limits_{|z-2|=1} \frac{\ln z}{(z-2)^2}\,dz = 2\pi i \ln' z|_{z=2} = \pi i$$

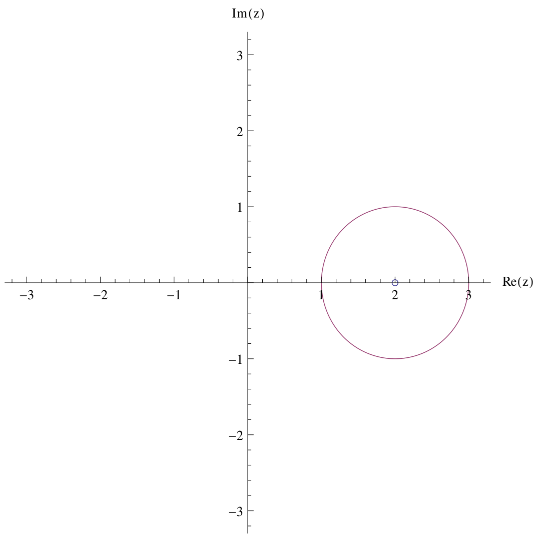

Bild 18 b): Kurve $|z-2| = 1$

c) Mit der verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel erhält man:

$$\oint\limits_{|z|=5} \frac{\sin z}{(z-\pi)^4}\,dz = \frac{2\pi i\,(\sin z)'''|_{z=\pi}}{3!} = -\frac{\pi i \cos\pi}{3} = \frac{\pi i}{3}$$

d)

Die Singularität $z_1 = 0$ liegt im Kreis $|z+i| = 2$.

verallgemeinerte Cauchysche Integralformel:

$$\oint\limits_{|z+i|=2} \frac{\cos z}{z^3}\,dz$$

$$= 2\pi i \left.\frac{(\cos z)''}{2!}\right|_{z=0}$$

$$= -\pi i \cos 0 = -\pi i$$

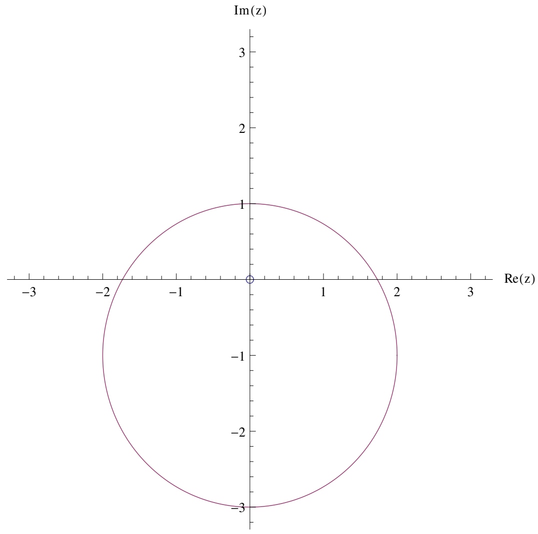

Bild 18 d): Kurve $|z+i| = 2$

e)

Die Singularität $z_1 = i\pi$ liegt im Kreis $|z| = 4$.

verallgemeinerte Cauchysche Integralformel:

$$\oint\limits_{|z|=4} \frac{\cosh z}{(z-i\pi)^5}\,dz$$

$$= \frac{2\pi i\,(\cosh z)''''|_{z=i\pi}}{4!}$$

$$= \frac{\pi i \cosh i\pi}{12} = \frac{\pi i \cos\pi}{12} = -\frac{\pi i}{12}$$

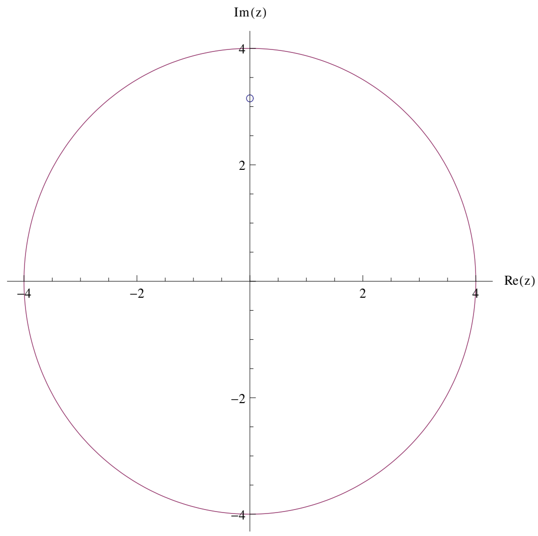

Bild 18 e): Kurve $|z| = 4$

Aufgabe 19:

a) Man berechne die Taylorreihe von $f(z) = \displaystyle\int_0^z \frac{d\xi}{4+\xi^2}$ zum Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ und bestimme den Konvergenzradius.

b) Man bestimme die Konvergenzradien der Taylor-Reihen folgender Funktionen zu den angegebenen Entwicklungspunkten z_0, ohne die Reihen selbst zu berechnen:

(i) $f(z) = \dfrac{5z}{z^2-2z+2}$, $z_0 = -1$ und $z_0 = -1-i$,

(ii) $f(z) = \dfrac{1}{\cosh z}$, $z_0 = \dfrac{7i}{2}$,

(iii) $f(z) = \ln(3z+5)$, $z_0 = 0$ und $z_0 = i$.

Lösung:

a) In der Kreisscheibe $|\xi| < 2 =: r$ erhält man mit Hilfe der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{4+\xi^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+(\xi/2)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\left(\frac{\xi}{2}\right)^2\right)^n = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2n}.$$

Da die Reihe in der Kreisscheibe gleichmäßig konvergiert, darf gliedweise integriert werden:

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_0^z \frac{d\xi}{4+\xi^2} = \int_0^z \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2n} d\xi = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^z\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2n} d\xi \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2n+1}\Bigg|_0^z = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+1} \end{aligned}$$

b) (i) $f(z) = \dfrac{5z}{z^2-2z+2} = \dfrac{5z}{(z-(1+i))(z-(1-i))}$

Die Singularitäten liegen bei $z_1 = 1+i$ und $z_2 = 1-i$. Damit ergibt sich der Konvergenzradius der Taylorreihe zum Entwicklungspunkt z_0 durch

$$r = \min\{|z_1 - z_0|, |z_2 - z_0|\}.$$

Für $z_0 = -1$ bzw. $z_0 = -1-i$ erhält man:

$$\begin{aligned} r_1 &= \min\{|1+i-(-1)|, |1-i-(-1)|\} \\ &= \min\{|2+i|, |2-i|\} = \sqrt{5}, \\ r_2 &= \min\{|1+i-(-1-i)|, |1-i-(-1-i)|\} \\ &= \min\{2|1+i|, 2\} = 2. \end{aligned}$$

(ii) Die Singularitäten von $f(z) = \dfrac{1}{\cosh z}$ ergeben sich aus

$0 = \cosh z = \cos y \cosh x + i \sin y \sinh x$

$\Rightarrow \quad \cos y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \pi/2 + k\pi$

$\Rightarrow \quad \sin(\pi/2 + k\pi) \sinh x = (-1)^k \sinh x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

Die Singularitäten liegen also bei $z_k = (\pi/2 + k\pi)i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Der Konvergenzradius für $z_0 = \dfrac{7i}{2}$ ergibt sich durch:

$$\begin{aligned} r &= \min_k \{|z_k - z_0|\} = \min_k \{|(\pi/2 + k\pi)i - \frac{7i}{2}|\} \\ &= \min_k |\pi + 2k\pi - 7|/2 = |\pi + 2\pi - 7|/2 \approx 1.2124 \end{aligned}$$

(iii) Der Hauptwert des Logarithmus der Funktion $\ln(3z + 5)$ ist nur in der geschlitzten Ebene definiert, d.h. reelle Wert x mit $3x + 5 \leq 0 \Rightarrow x \leq -5/3$ sind nicht zugelassen. Der Konvergenzradius ergibt sich daher als kleinster Abstand zu dieser nicht definierten Halbgeraden.

Für $z_0 = 0$ erhält man $r_1 = |0 - (-5/3)| = 5/3$

und für $z_0 = i$ erhält man $r_2 = |i - (-5/3)| = \sqrt{34}/3$.

Aufgabe 20:

Man gebe alle Potenzreihenentwicklungen der Funktion

$$f(z) = \frac{2z}{z^2 - 1}$$

zum Entwicklungspunkt $z_0 = 2$ mit Konvergenzbereich an.

Lösung:

Die Faktorisierung des Nenners $z^2 - 1 = (z+1)(z-1)$ ergibt die Singularitäten der Funktion bei $z_1 = -1$ und $z_2 = 1$. Eine Partialbruchzerlegung liefert:

$$f(z) = \frac{2z}{(z+1)(z-1)} = \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1} .$$

Aufgrund der Lage des Entwicklungspunktes bei $z_0 = 2$ und der beiden Singularitäten $z_1 = -1$ und $z_2 = 1$ kann man ablesen, dass eine Taylor-Reihenentwicklung in der Kreisscheibe $|z-2| < 1$ vorliegen wird, eine Laurent-Reihenentwicklung im Kreisring $1 < |z-2| < 3$ und eine davon verschiedene Laurent-Reihenentwicklung im Außenraum $3 < |z-2|$.

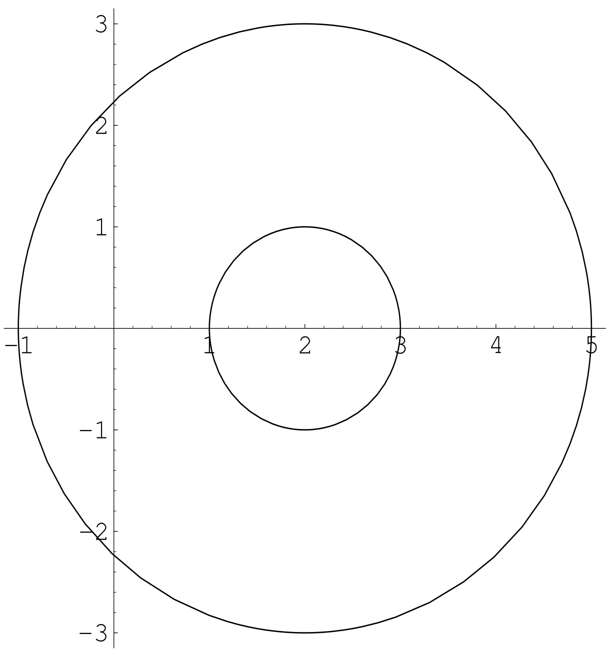

Bild 20: Konvergenzbereiche der Laurent-Reihenentwicklungen um $z_0 = 2$

Mit Hilfe der Summenformel der geometrischen Reihe im entsprechenden Konvergenzbereich können die Partialbrüche durch Reihenentwicklungen dargestellt werden:

$|z-2|<1 \quad :$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1+(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n$$

$|z-2|>1 \quad :$

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-1} &= \frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{1+1/(z-2)} = \frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{z-2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-2)^{n+1}} = -\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n(z-2)^n\end{aligned}$$

$|z-2|<3 \quad :$

$$\begin{aligned}\frac{1}{z+1} &= \frac{1}{3+z-2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+(z-2)/3} \\ &= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-2}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-2)^n\end{aligned}$$

$|z-2|>3 \quad :$

$$\begin{aligned}\frac{1}{z+1} &= \frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{1+3/(z-2)} = \frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{z-2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n(-1)^n}{(z-2)^{n+1}} = -\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-2)^n\,.\end{aligned}$$

Taylor-Reihe mit Konvergenz in der Kreisscheibe $\quad |z-2|<1\,:$

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-2)^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{3^{n+1}}+1\right)(z-2)^n\,.\end{aligned}$$

Laurent-Reihe mit Konvergenz im Kreisring $\quad 1<|z-2|<3\,:$

$$f(z) = \frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-1} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-2)^n}_{\text{Nebenteil}} - \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n(z-2)^n}_{\text{Hauptteil}}\,.$$

Laurent-Reihe mit Konvergenz im Außenring $\quad 3<|z-2|\,:$

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-1} = -\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-2)^n-\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n(z-2)^n \\ &= -\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n\left(\frac{1}{3^{n+1}}+1\right)(z-2)^n\,.\end{aligned}$$