Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2020**
Prof. Dr. A. Iske
Dr. K. Rothe ©

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 4

Aufgabe 13:

a) Man skizziere die Gerade $G = \{z \in \mathbb{C} \mid z = -1 + it\,,\ t \in \mathbb{R}\}$ und den Kreis $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| = \sqrt{5}\}$ und berechne die beiden Punkte z_1 und z_2, die symmetrisch zu G und K liegen.

b) Man bestimme alle konformen Funktionen

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

mit $T(z_1) = 0$ und $T(z_2) = \infty$.

c) Man skizziere das Bild von G und K unter T, wenn noch $T(-1) = -1$ gilt.

Lösung:

a)

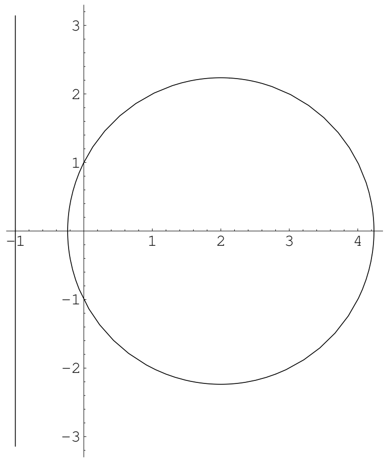

Bild 13 a): Gerade G und Kreis K

Da z_1 und z_2 symmetrisch zur Geraden G liegen, steht die durch beide Punkte verlaufende Gerade H senkrecht zu G. Diese Gerade H verläuft, wegen der Symmetrie der Punkte zu K, auch durch den Mittelpunkt $z_0 = 2$ von K. Damit ist H die reelle Achse und es gilt $z_{1,2} \in \mathbb{R}$.

Aus der Symmetrie zu G folgt $z_1 = -1 + a$ und $z_2 = -1 - a$ mit $a \in \mathbb{R}$.

Symmetrie zu $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| = \sqrt{5}\}$ liefert die Bedingung

$$\begin{aligned} 5 = (\sqrt{5})^2 &= (z_1 - z_0)(\bar{z}_2 - \bar{z}_0) \\ &= (-1 + a - 2)(-1 - a - 2) \\ &= -(a-3)(a+3) = -(a^2 - 9) \\ \Rightarrow a^2 &= 4 \Rightarrow a = \pm 2 \\ \Rightarrow z_1 = -1 \pm 2 = 1 \vee -3 \quad &, \quad z_2 = -1 \mp 2 = -3 \vee 1 \end{aligned}$$

b) Mit

$$T(z) = k \cdot \frac{z - z_1}{z - z_2}, \quad k \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$$

gilt $w_1 = T(z_1) = 0$ und $w_2 = T_2(z_2) = \infty$.

T ist eine Möbius-Transformation wegen $k \neq 0$, denn $ad - bc = k(z_1 - z_2) \neq 0$.

T ist holomorph für $z \in \mathbb{C} \backslash \{z_2\}$ und deshalb auch konform in diesem Gebiet, da $T'(z) = \dfrac{ad - bc}{(z - z_2)^2} \neq 0$ gilt.

c) Da z_1 und z_2 symmetrisch zu G und K liegen, liegen auch $w_1 = 0$ und $w_2 = \infty$ symmetrisch zu den Bildkreisen $T(G)$ und $T(K)$. Damit müssen $T(G)$ und $T(K)$ Kreise um den Ursprung sein, denn z_2 liegt nicht auf G oder K und damit liegt $T(z_2) = \infty$ auch nicht auf $T(G)$ oder $T(K)$.

Da $z_3 = -1$ auf G liegt, wird G wegen $T(-1) = -1$ auf den Einheitskreis abgebildet.

Aus $T(-1) = -1 = k \cdot \dfrac{-1 - z_1}{-1 - z_2} = -k$ folgt $k = 1$ und

$$T(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

Für $z_1 = 1$ und $z_2 = -3$ ergibt sich $\quad T_1(z) = \dfrac{z - 1}{z + 3}$.

Für $z_1 = -3$ und $z_2 = 1$ ergibt sich $\quad T_2(z) = \dfrac{z + 3}{z - 1}$.

Zur Kontrolle überprüfen wir nochmal, ob $T_1(G)$ der Einheitskreis ist:

$$|T_1(-1 + it)| = \left| \frac{-1 + it - 1}{-1 + it + 3} \right| = \frac{\sqrt{4 + t^2}}{\sqrt{4 + t^2}} = 1 .$$

Der Radius R von $T(K)$ kann, da $z_4 = 2+\sqrt{5}$ auf K liegt, durch $R = |T(2+\sqrt{5})|$ bestimmt werden.

Konkret ergibt sich für T_1

$$R_1 = \left|\frac{2+\sqrt{5}-1}{2+\sqrt{5}+3}\right| = \left|\frac{1+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}\right| = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.447$$

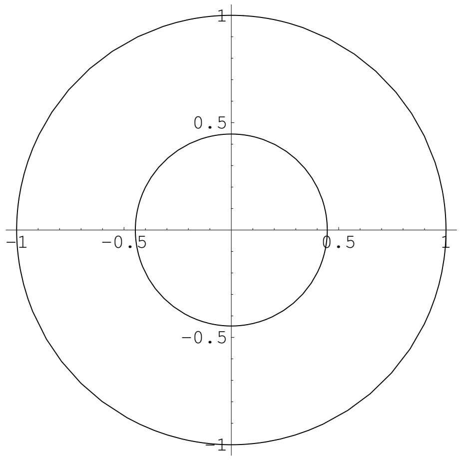

Bild 13 c): Kreise $T_1(G)$ und $T_1(K)$

Da z_1 im Inneren von K liegt, wird das Gebiet rechts von G ohne die zu K gehörige Kreisscheibe auf den Kreisring $\{w \in \mathbb{C} \mid R_1 < |w| < 1\}$ abgebildet.

Im anderen Fall, d.h. mit T_2 erhält man $R_2 = 1/R_1 = \sqrt{5} \approx 2.236$ und den Kreisring $\{w \in \mathbb{C} \mid 1 < |w| < \sqrt{5}\}$. Dabei wird das Innere von K auf das Außengebiet abgebildet und die links von G liegende Ebene auf das Innere des Einheitskreises.

Aufgabe 14:

Gegeben sei die rechts der Geraden $G = \{z \in \mathbb{C} \mid z = -1 + it\,,\ t \in \mathbb{R}\}$ liegende Halbebene E ohne die Kreisscheibe $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-2| \le \sqrt{5}\}$.

Man berechne eine in E harmonische Funktion, die auf dem Rand von K den Wert 1 und auf G den Wert 0 annimmt.

Hinweis: Man transformiere das Problem, wie in Aufgabe 13 angegeben, löse das konform verpflanzte Problem in Polarkoordinaten und transformiere zurück.

Lösung:

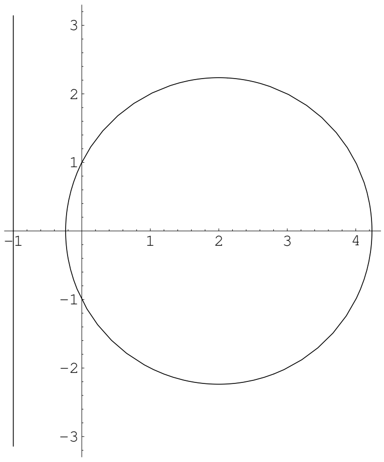

Bild 14 a): Halbebene E ohne die Kreisscheibe K

Gesucht ist die reellwertige Funktion $u : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ für die mit $z = x + iy$ gilt

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0 \quad \text{für alle} \quad (x,y)^T \in E \\ u(x,y) &= 0 \quad \text{für alle} \quad (x,y)^T \in G \\ u(x,y) &= 1 \quad \text{für alle} \quad (x,y)^T \in K\,. \end{aligned}$$

Das Gebiet E wird jetzt beispielsweise durch die konforme Möbius-Transformation

$$T_2(z) = \frac{z+3}{z-1}$$

aus Aufgabe 13 auf den Kreisring

$$T_2(E) = \{w \in \mathbb{C} \mid 1 < |w| < \sqrt{5}\}$$

abgebildet. Die konform verpflanzte Funktion lautet mit $T_2(z) = w = \xi + i\eta$

$$U(\xi,\eta) = U(w) := u(T_2^{-1}(w))$$

und erfüllt wegen des zweiten konformen Verpflanzungssatzes:
$\Delta u = \Delta U \cdot |T_2'(z)|^2$ und $T_2'(z) \neq 0$ das Randwertproblem

$$\begin{aligned}
\Delta U(\xi,\eta) &= 0 \quad \text{für alle} \quad (\xi,\eta)^T \in T_2(E) \\
U(\xi,\eta) &= 0 \quad \text{für alle} \quad (\xi,\eta)^T \in T_2(G) \\
U(\xi,\eta) &= 1 \quad \text{für alle} \quad (\xi,\eta)^T \in T_2(K)\,.
\end{aligned}$$

Dieses Problem im Kreisring $T_2(E)$ lässt sich besser in Polarkoordinaten lösen, deshalb wird erneut mit $\xi = r\cos\varphi$, $\eta = r\sin\varphi$, $1 \le r \le \sqrt{5}$, $0 \le \varphi < 2\pi$ und $v(r,\varphi) := U(\xi(r,\varphi),\eta(r,\varphi))$ transformiert und das Problem lautet jetzt

$$\begin{aligned}
v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\varphi\varphi} &= 0 \quad \text{für alle} \quad 1 \le r \le \sqrt{5}\,, \quad 0 \le \varphi < 2\pi \\
v(\sqrt{5},\varphi) &= 1\,, \quad 0 \le \varphi < 2\pi \\
v(1,\varphi) &= 0\,.
\end{aligned}$$

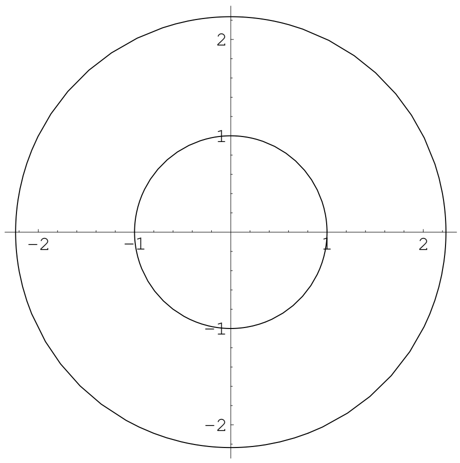

Bild 14 b): $T_2(E\backslash K) = \{w \in \mathbb{C} \mid 1 < |w| < \sqrt{5}\}$

Auf Grund der Gebietssymmetrie und der Rotationssymmetrie der Randdaten liegt die Vermutung nahe, dass dieses Problem eine rotationssymmetrische Lösung besitzt, d.h. $v(r,\varphi) = v(r)$. Das Problem vereinfacht sich so zu einer Randwertaufgabe mit gewöhnlicher Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
v_{rr} + \frac{1}{r}v_r &= 0 \quad \text{für alle} \quad 1 < r < \sqrt{5} \\
v(\sqrt{5}) &= 1\,, \\
v(1) &= 0\,,
\end{aligned}$$

deren allgemeine Lösung lautet $v(r) = c_1 \ln r + c_2$. Anpassen an die Randdaten liefert

$$0 = v(1) = c_1 \ln 1 + c_2 = c_2 \qquad \text{und} \qquad 1 = v(\sqrt{5}) = c_1 \ln\sqrt{5} \;\Rightarrow\; c_1 = 1/\ln\sqrt{5}\,.$$

Die gesuchte Lösung in Polarkoordinaten lautet somit

$$v(r,\varphi) = v(r) = \frac{\ln r}{\ln\sqrt{5}}\,.$$

Rücktransformation in die $w-$ Ebene ergibt dort die Lösung

$$U(w) = \frac{\ln|w|}{\ln\sqrt{5}} \,.$$

Rücktransformation in die $z-$ Ebene ergibt dort die Lösung

$$u(z) = \frac{\ln|T_2(z)|}{\ln\sqrt{5}} \,.$$

Mit $z = x + iy$ und

$$|T_2(z)| \;=\; \left|\frac{z+3}{z-1}\right| = \left(\frac{(x+3)^2+y^2}{(x-1)^2+y^2}\right)^{1/2} \;=\; \left(\frac{x^2+y^2+6x+9}{x^2+y^2-2x+1}\right)^{1/2}$$

ergibt sich in der $(x, y)-$ Ebene die Lösungsdarstellung

$$u(x,y) = \frac{1}{2\ln\sqrt{5}} \ln\left(\frac{x^2+y^2+6x+9}{x^2+y^2-2x+1}\right) \,.$$

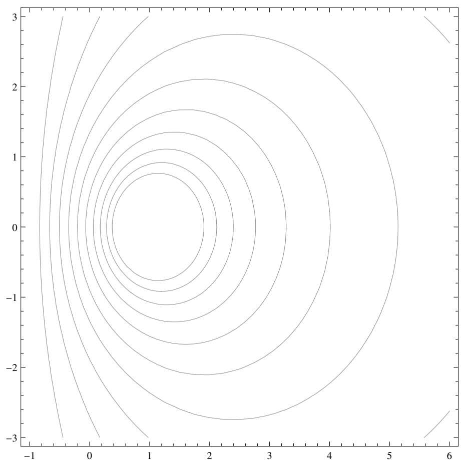

Bild 14 c): Höhenlinien der Lösung $u(x, y)$

Aufgabe 15:

Man berechne

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{2+3it}\,dt\,,$

b) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{4it+3}\,dt\,,$

c) $\displaystyle\int_{c_{1,2}} 4z+5\bar{z}\,dz\,,$

dabei ist c_1 der geradlinige Weg von $z_1 = -i$ nach $z_2 = i$ und c_2 der in mathematisch positivem Sinn durchlaufene Ursprungshalbkreis der auch z_1 und z_2 verbindet,

Lösung:

a)
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} e^{2+3it}\,dt &= \int_0^{\pi} e^2(\cos(3t)+i\sin(3t))\,dt\\ &= \int_0^{\pi} e^2\cos(3t)\,dt + i\int_0^{\pi} e^2\sin(3t)\,dt\\ &= \frac{e^2}{3}\sin(3t)\Big|_0^{\pi} - i\frac{e^2}{3}\cos(3t)\Big|_0^{\pi} = i\frac{2e^2}{3}\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\int_1^{2} \frac{1}{4it+3}\,dt &= \int_1^{2} \frac{-4it+3}{(4it+3)(-4it+3)}\,dt\\ &= \int_1^{2} \frac{3}{9+16t^2}\,dt - i\int_1^{2} \frac{4t}{9+16t^2}\,dt\\ &= \frac{1}{3}\int_1^{2} \frac{1}{1+(4t/3)^2}\,dt - \frac{i}{8}\int_1^{2} \frac{32t}{9+16t^2}\,dt\\ &= \frac{1}{4}\arctan\frac{4t}{3}\Big|_1^{2} - \frac{i}{8}\ln\left(9+16t^2\right)\Big|_1^{2}\\ &= \frac{1}{4}\left(\arctan\frac{8}{3} - \arctan\frac{4}{3}\right) - \frac{i}{8}(\ln 73 - \ln 25)\end{aligned}$$

c) $c_1(t) = it\,, \quad -1 \le t \le 1$

$$\int_{c_1} 4z + 5\bar{z}\,dz = \int_{-1}^{1} (4c_1(t) + 5\bar{c}_1(t)) \cdot \dot{c}_1(t)\,dt = \int_{-1}^{1} (4it - 5it)i\,dt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_{-1}^{1} = 0$$

$c_2(t) = e^{it}\,, \quad -\pi/2 \le t \le \pi/2$

$$\begin{aligned}\int_{c_2} 4z + 5\bar{z}\,dz &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (4c_2(t) + 5\bar{c}_2(t)) \cdot \dot{c}_2(t)\,dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (4e^{it} + 5e^{-it})ie^{it}\,dt \\ &= i \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4e^{2it} + 5\,dt = 5\pi i\end{aligned}$$

Aufgabe 16:

Man berechne direkt und mit Hilfe einer Stammfunktion

a) $\int\limits_c 2z - 3\,dz$ entlang des geradlinigen Weges von $-1-i$ nach $-i$,

b) $\int\limits_c z\cosh z\,dz$ für $c(t) = it$ mit $0 \le t \le 1$,

c) $\int\limits_{-i}^{1} \frac{z+1}{z}\,dz$ für $c(\varphi) = e^{i\varphi}$ (positiv orientiert),

d) $\int\limits_{-i}^{i} \sin z\,dz$ für $c(t) = it$, $-1 \le t \le 1$.

Lösung:

a) direkt:
Kurvenparametrisierung:
$c(t) = -1 - i + t\,, \quad 0 \le t \le 1 \;\Rightarrow\; \dot{c}(t) = 1$

$$\begin{aligned}\int\limits_c 2z - 3\,dz &= \int\limits_0^1 (2c(t) - 3)\dot{c}(t)\,dt = \int\limits_0^1 2(-1-i+t) - 3\,dt \\ &= \left((-5-2i)t + t^2\right)\Big|_0^1 = -5 - 2i + 1 = -4 - 2i\end{aligned}$$

Stammfunktion:

$$\begin{aligned}\int\limits_c 2z - 3\,dz &= \int\limits_{-1-i}^{-i} 2z - 3\,dz = \left(z^2 - 3z\right)\Big|_{-1-i}^{-i} \\ &= (-i)^2 - 3(-i) - \left((-i-1)^2 - 3(-i-1)\right) \\ &= -1 + 3i - (2i + 3i + 3) = -4 - 2i\end{aligned}$$

b) direkt: $c(t) = it \Rightarrow \dot{c}(t) = i$ mit $0 \le t \le 1$ und $\cosh(it) = \cos t$

$$\begin{aligned}\int\limits_c z\cosh z\,dz &= \int\limits_0^1 \dot{c}(t)c(t)\cosh c(t)\,dt = \int\limits_0^1 (i)^2 t\cosh(it)\,dt \\ &= -\int\limits_0^1 t\cos t\,dt = -\,t\sin t\big|_0^1 + \int\limits_0^1 \sin t\,dt \\ &= -\,(t\sin t + \cos t)\big|_0^1 = -\sin 1 - \cos 1 + 1\end{aligned}$$

Stammfunktion: mit $\sinh i = \frac{1}{2}(e^i - e^{-i}) = i \sin 1$

$$\begin{aligned}\int_c z\cosh z\,dz &= \int_0^i z\cosh z\,dz = (z\sinh z - \cosh z)\big|_0^i\\ &= i\sinh i - \cosh i + 1 = -\sin 1 - \cos 1 + 1\end{aligned}$$

c) direkt:

$$\begin{aligned}\int_{-i}^{1} \frac{z+1}{z}\,dz &= \int_{-\pi/2}^{0} \left(1 + \frac{1}{c(\varphi)}\right)\dot c(\varphi)\,d\varphi = \int_{-\pi/2}^{0} \left(1 + \frac{1}{e^{i\varphi}}\right) ie^{i\varphi}\,d\varphi\\ &= i\int_{-\pi/2}^{0} 1 + e^{i\varphi}\,d\varphi = i\left(\varphi + \frac{e^{i\varphi}}{i}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{0} = 1 + i\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

Stammfunktion:

In der geschlitzten Ebene $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-^0$ ist $\ln z$ Stammfunktion zu $\frac{1}{z}$

$$\begin{aligned}\int_{-i}^{1} \frac{z+1}{z}\,dz &= \int_{-i}^{1} 1 + \frac{1}{z}\,dz = (z + \ln z)\big|_{-i}^{1}\\ &= 1 + \ln|1| + i\cdot 0 - \left(-i + \ln|-i| + i\frac{-\pi}{2}\right)\\ &= 1 + i\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

d) direkt: $c(t) = it$, $\dot c(t) = i$ mit $-1 \le t \le 1$

$$\begin{aligned}\int_{-i}^{i} \sin z\,dz &= \int_{-1}^{1} \dot c(t)\sin(c(t))\,dt = \int_{-1}^{1} i\sin(it))\,dt\\ &= \int_{-1}^{1} i\frac{1}{2i}\left(e^{iit} - e^{-iit}\right)\,dt = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^t - e^{-t}\,dt\\ &= -\frac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right)\Big|_{-1}^{1} = 0\end{aligned}$$

Stammfunktion:

$$\int_{-i}^{i} \sin z\,dz = -\cos z|_{-i}^{i} = -\frac{1}{2}\left(e^{ii} + e^{-ii} - e^{-ii} - e^{ii}\right) = 0$$