

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4 23.6.-26.6.

Aufgabe 13:

- a) Man skizziere die Gerade $G = \{z \in \mathbb{C} \mid z = -1 + it, t \in \mathbb{R}\}$ und den Kreis $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| = \sqrt{5}\}$ und berechne die beiden Punkte z_1 und z_2 , die symmetrisch zu G und K liegen.
- b) Man bestimme alle konformen Funktionen

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

mit $T(z_1) = 0$ und $T(z_2) = \infty$.

- c) Man skizziere das Bild von G und K unter T , wenn noch $T(-1) = -1$ gilt.

Aufgabe 14:

Gegeben sei die rechts der Geraden $G = \{z \in \mathbb{C} \mid z = -1 + it, t \in \mathbb{R}\}$ liegende Halbebene E ohne die Kreisscheibe $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| \leq \sqrt{5}\}$.

Man berechne eine in E harmonische Funktion, die auf dem Rand von K den Wert 1 und auf G den Wert 0 annimmt.

Hinweis: Man transformiere das Problem, wie in Aufgabe 15 angegeben, löse das konform verpflanzte Problem in Polarkoordinaten und transformiere zurück.

Aufgabe 15:

Man berechne

a)
$$\int_0^{\pi} e^{2+3it} dt,$$

b)
$$\int_1^2 \frac{1}{4it+3} dt,$$

c)
$$\int_{c_{1,2}} 4z + 5\bar{z} dz,$$

dabei ist c_1 der geradlinige Weg von $z_1 = -i$ nach $z_2 = i$ und c_2 der in mathematisch positivem Sinn durchlaufene Ursprungshalbkreis der auch z_1 und z_2 verbindet,

Aufgabe 16:

Man berechne direkt und mit Hilfe einer Stammfunktion

a)
$$\int_c 2z - 3 dz \text{ entlang des geradlinigen Weges von } -1 - i \text{ nach } -i,$$

b)
$$\int_c z \cosh z dz \text{ für } c(t) = it \text{ mit } 0 \leq t \leq 1,$$

c)
$$\int_{-i}^1 \frac{z+1}{z} dz \text{ für } c(\varphi) = e^{i\varphi} \text{ (positiv orientiert),}$$

d)
$$\int_{-i}^i \sin z dz \text{ für } c(t) = it, -1 \leq t \leq 1.$$