Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2020**
Prof. Dr. A. Iske
Dr. K. Rothe ©

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 3

Aufgabe 9:

a) Für die Kreise $K_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-4i| = 3\}$ und $K_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+6i| = 3\}$ berechne man die Punkte z_1 und z_2, die symmetrisch zu beiden Kreisen liegen.

b) Man gebe eine Möbius-Transformation T an, mit:

$$T(3i) = 0\,, \quad T(-5i) = \infty \quad \text{und} \quad T(-3i) = 2\,.$$

c) Man skizziere die Bildkreise $T(K_1)$ und $T(K_2)$ und ermittle ihre Radien.

Lösung:

a) Die Symmetriebedingung zu K_1

$$(z_1 - 4i)(\bar{z}_2 + 4i) = 3^2 \quad \Rightarrow \quad \bar{z}_2 = \frac{9}{z_1 - 4i} - 4i$$

eingesetzt in die Symmetriebedingung zu K_2 ergibt

$$9 = 3^2 = (z_1 + 6i)(\bar{z}_2 - 6i) = (z_1 + 6i)\left(\frac{9}{z_1 - 4i} - 10i\right)$$

$$\Rightarrow\; 9z_1 - 36i = (z_1 + 6i)(9 - 10i(z_1 - 4i)) = (z_1 + 6i)(-10iz_1 - 31)$$

$$\Rightarrow\; 0 = -10i(z_1^2 + 2iz_1 + 15) = -10i(z_1 - 3i)(z_1 + 5i)$$

$$\Rightarrow\; z_1 = 3i \;\Rightarrow\; \bar{z}_2 = \frac{9}{3i - 4i} - 4i = 5i \;\Rightarrow\; z_2 = -5i$$

$$\vee\; z_1 = -5i \;\Rightarrow\; \bar{z}_2 = \frac{9}{-5i - 4i} - 4i = -3i \;\Rightarrow\; z_2 = 3i$$

b) Mit $T(z) = k\dfrac{z-3i}{z+5i}$ sind die Bedingungen $T(3i) = 0$ und $T(-5i) = \infty$ erfüllt.

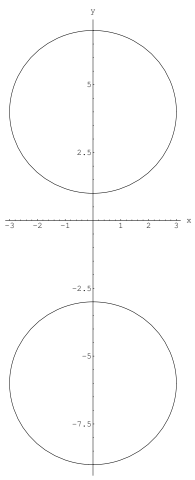
$$2 = T(-3i) = k\frac{-3i-3i}{-3i+5i} \;\Rightarrow\; k = -\frac{2}{3} \;\Rightarrow\; T(z) = -\frac{2}{3}\cdot\frac{z-3i}{z+5i}$$

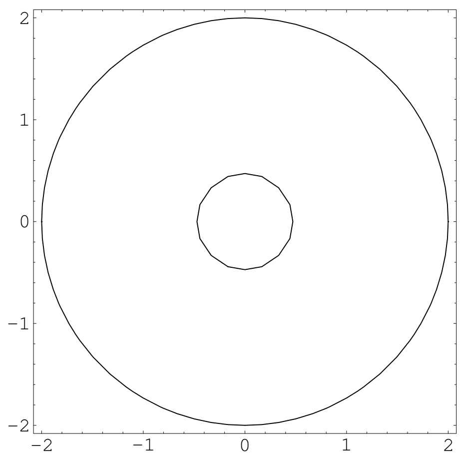
c) Nach a) liegen z_1 und z_2 symmetrisch zu K_1 und K_2 und nicht auf K_1 und K_2. Also sind auch $T(z_1) = 0$ und $T(z_2) = \infty$ symmetrisch zu den Bildkreisen $T(K_1)$ und $T(K_2)$. Damit müssen $T(K_1)$ und $T(K_2)$ Kreise um den Ursprung sein.

Radien $R_{1,2}$ von $K_{1,2}$:

$$i \in K_1 \;\Rightarrow\; R_1 = \left|-\frac{2}{3}\cdot\frac{i-3i}{i+5i}\right| = \frac{2}{9}$$

$$-3i \in K_2 \;\Rightarrow\; R_2 = |T(-3i)| = 2$$





K_1 und K_2 **Bild 9:** $T(K_1)$ und $T(K_2)$

Aufgabe 10:

Für $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^3$ berechne man

a) $A := \frac{1}{2}\left(f_x(z_0) - i f_y(z_0)\right)$ und

b) $B := \frac{1}{2}\left(f_x(z_0) + i f_y(z_0)\right)$.

Man vergleiche die Ergebnisse mit den Ableitungen von $f(z, \bar{z}) = z^3$ nach den unabhängigen Variablen z und $\bar{z}$, also mit

$$\frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}.$$

Dabei sollen die bekannten Ableitungsregeln aus dem Reellen rein formal übertragen werden.

Lösung

f besitzt folgende Zerlegung in Real- und Imaginärteil

$$f(z_0) = z_0^3 = (x_0 + iy_0)^3 = x_0^3 - 3x_0y_0^2 + i(3x_0^2y_0 - y_0^3) = f(x_0, y_0).$$

Man erhält

$$f_x(z_0) = f_x(x_0, y_0) = 3x_0^2 - 3y_0^2 + i6x_0y_0,$$
$$f_y(z_0) = f_y(x_0, y_0) = -6x_0y_0 + i(3x_0^2 - 3y_0^2)$$

a)
$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\left(f_x(z_0) - i f_y(z_0)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(3x_0^2 - 3y_0^2 + i6x_0y_0 - i(-6x_0y_0 + i(3x_0^2 - 3y_0^2))\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(6x_0^2 - 6y_0^2 + i12x_0y_0\right) = 3\left(x_0^2 - y_0^2 + i2x_0y_0\right) \\ &= 3(x_0 + iy_0)^2 = 3z_0^2 = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2}\left(f_x(z_0) + i f_y(z_0)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(3x_0^2 - 3y_0^2 + i6x_0y_0 + i(-6x_0y_0 + i(3x_0^2 - 3y_0^2))\right) \\ &= 0 = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \end{aligned}$$

Aufgabe 11:

a) Man entscheide (mit Begründung), ob

(i) $f(z) = z^2 + \bar{z}^2 + 4i \cdot \mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z) + i$ holomorph ist,

(ii) $g(z) = \mathrm{Re}(e^z)$ holomorph ist,

(iii) $\mathrm{Re}(z^{10} + \sin^7 z)$ harmonisch ist.

b) Gegeben sei die Funktion

$$v(x,y) = 2xy - 6y + e^x \sin y.$$

(i) Man zeige, dass v harmonisch ist.

(ii) Zu $v(x,y)$ bestimme man eine Funktion $u(x,y)$, so dass die Funktion $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ mit $z = x + iy$ holomorph wird.

Lösung:

a) (i) f ist holomorph, denn mit $z = x + iy$ gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 + \bar{z}^2 + 4i \cdot \mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z) + i \\ &= x^2 - y^2 + i2xy + x^2 - y^2 - i2xy + i4xy + i \\ &= \underbrace{2(x^2 - y^2)}_{=u(x,y)} + i\underbrace{(4xy + 1)}_{=v(x,y)} . \end{aligned}$$

Dabei sind u, v stetig partiell differenzierbar und es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$u_x = 4x = v_y \, , \quad v_x = 4y = -u_y \, .$$

(ii) $g(z) = \mathrm{Re}(e^z) = e^x \cos y$ ist reellwertig und nicht konstant, also nicht holomorph.

(iii) $\mathrm{Re}(z^{10} + \sin^7 z)$ ist harmonisch, denn $z^{10} + \sin^7 z$ ist holomorph.

b) (i)
$$\begin{aligned} \Delta v &= (2xy - 6y + e^x \sin y)_{xx} + (2xy - 6y + e^x \sin y)_{yy} \\ &= e^x \sin y + (-e^x \sin y) = 0 \end{aligned}$$

(ii) Damit $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ holomorph in $\mathbb{C}$ ist, müssen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sein:

$u_x = v_y = (2xy - 6y + e^x \sin y)_y = 2x - 6 + e^x \cos y$

$\Rightarrow \quad u = x^2 - 6x + e^x \cos y + c(y)$

$u_y = -e^x \sin y + c'(y) = -v_x = -(2xy - 6y + e^x \sin y)_x = -2y - e^x \sin y$

$\Rightarrow \quad c'(y) = -2y \quad \Rightarrow \quad c(y) = -y^2 + c \ \in \mathbb{R}$

Da $u(x,y) = x^2 - y^2 - 6x + e^x \cos y + c$ und v stetig partiell differenzierbar sind, ist f holomorph in $\mathbb{C}$.

Bemerkung (ohne Wertung):

Für $f(z) = (z-3)^2 + e^z$ und $c = 9$ ergibt sich $u(x,y) = \mathrm{Re} f$ und $v(x,y) = \mathrm{Im} f$.

Aufgabe 12:

Gegeben seien die Kurven $c_1(t) = it$ und $c_2(t) = e^{it}$ jeweils für $0 < t < \pi$.

a) Man skizziere die Kurven c_1 und c_2 in der z-Ebene und bestimme ihren Schnittpunkt mit Schnittwinkel.

b) In welche Bildkurven der w-Ebene gehen c_1 und c_2 unter dem Hauptwert von $w = \ln z$ über? Man überprüfe, ob im Schnittpunkt der Bildkurven der Winkel und das lokale Längenverhältnis erhalten bleiben.

Lösung:

$w = \ln z = \ln|z| + i \arg z$ mit $-\pi < \arg z < \pi$ (Hauptwert)

a) $c_1(t) = it$ mit $0 < t < \pi$:
Strecke zwischen 0 und $i\pi$ ohne Endpunkte

$c_2(t) = e^{it}$ mit $0 < t < \pi$:
oberer Einheitskreis ohne Endpunkte 1 und -1 .

Schnittpunkt: $c_1(1) = i = c_2\left(\frac{\pi}{2}\right)$

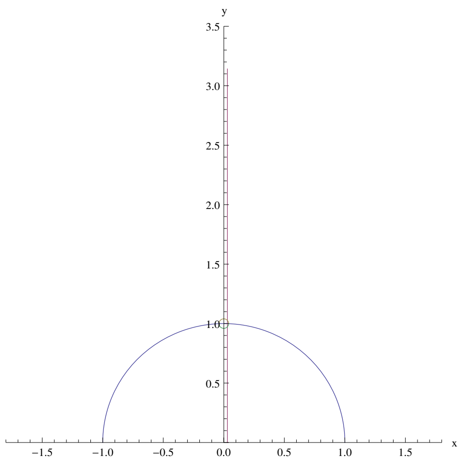


Bild 12 a): $c_1(t)$, $c_2(t)$ und Schnittpunkt $z_s = i$ in der z-Ebene

Ableitungen der Kurven in den Schnittpunkten:

$\dot{c}_1(t) = i \Rightarrow \dot{c}_1(1) = i$ und $\dot{c}_2(t) = ie^{it} \Rightarrow \dot{c}_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = i^2 = -1$

Schnittwinkel:

$$\gamma = \angle\left(\dot{c}_2\left(\frac{\pi}{2}\right), \dot{c}_1(1)\right) = \arg \dot{c}_2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \arg \dot{c}_1(1)$$
$$= \arg(-1) - \arg i = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

b) Die Bildkurven werden mit d_1 und d_2 bezeichnet.

$d_1(t) = \ln(c_1(t)) = \ln|it| + i\arg(it) = \ln t + \dfrac{i\pi}{2}$ mit $0 < t < \pi$

(Zur reellen Achse parallele Halbgerade ohne Endpunkte)

$d_2(t) = \ln(c_2(t)) = \ln|e^{it}| + i\arg(e^{it}) = \ln 1 + it = it$ mit $0 < t < \pi$

(Strecke zwischen 0 und $i\pi$ ohne Endpunkte)

Schnittpunkt: $\quad d_1(1) = \dfrac{i\pi}{2} = d_2\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

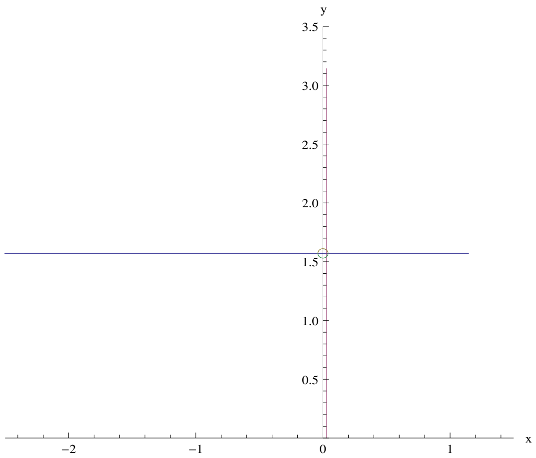


Bild 12 b): $d_1(t)$, $d_2(t)$ und Schnittpunkt $w_s = \ln z_s = \dfrac{i\pi}{2}$ in der w-Ebene

Ableitungen der Bildkurven in den Schnittpunkten:

$\dot{d}_1(t) = \dfrac{1}{t} \Rightarrow \dot{d}_1(1) = 1$ und $\dot{d}_2(t) = i \Rightarrow \dot{d}_2\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = i$

Schnittwinkel:

$\tilde{\gamma} = \angle\left(\dot{d}_2\left(\dfrac{\pi}{2}\right), \dot{d}_1(1)\right) = \arg \dot{d}_2\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - \arg \dot{d}_1(1)$

$= \arg i - \arg 1 = \dfrac{\pi}{2} - 0 = \dfrac{\pi}{2}$

lokales Längenverhältnis:

$$\frac{|\dot{c}_2\left(\frac{\pi}{2}\right)|}{|\dot{c}_1(1)|} = \frac{|-1|}{|i|} = 1 = \frac{|i|}{|1|} = \frac{|\dot{d}_2\left(\frac{\pi}{2}\right)|}{|\dot{d}_1(1)|}$$

Bemerkung:

Der Streckungsfaktor $f'(c(t))$, der in

$$\dot{d}(t) = \frac{d}{dt}\left(f(c(t))\right) = f'(c(t))\dot{c}(t)$$

steckt, kürzt sich im Schnittpunkt heraus.

Der Schnittwinkel und das lokale Längenverhältnis bleiben erhalten, da die Kurven im Holomorphiegebiet von $\ln z$ verlaufen.