**Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg** **SoSe 2020**
Prof. Dr. A. Iske
Dr. K. Rothe ©

# Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

## Lösungen zu Blatt 2

**Aufgabe 5:**

a) Für den Hauptwert des komplexen Logarithmus ln und $z_1 = -1 - i\sqrt{3}$ und $z_2 = -2i$ berechne man

$$\ln(z_1)\,,\ \ln(z_2) \quad \text{und} \quad \ln(z_1 z_2),$$

und überprüfe an diesem Beispiel, ob für den Hauptwert die Funktionalgleichung gilt:

$$\ln(z_1) + \ln(z_2) = \ln(z_1 z_2)\,.$$

b) Die cos-Funktion wird im Komplexen definiert durch

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)\ .$$

Man berechne Real- und Imaginärteil von $\cos z$ und bestimme alle Lösungen von $\cos z = 3$.

**Lösung:**

a) Der Hauptwert $\ln z$ des Logarithmus ist definiert für $-\pi < \arg z < \pi$ durch

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z\,.$$

$$\ln(z_1) = \ln(-1 - i\sqrt{3}) = \ln|-1 - i\sqrt{3}| + i\arg(-1 - i\sqrt{3}) = \ln 2 - i\frac{2\pi}{3}$$

$$\ln(z_2) = \ln(-2i) = \ln|-2i| + i\arg(-2i) = \ln 2 - i\frac{\pi}{2}$$

$$\ln(z_1) + \ln(z_2) = \ln 2 - i\frac{2\pi}{3} + \ln 2 - i\frac{\pi}{2} = \ln 4 - i\frac{7\pi}{6}$$

$z_1 z_2 = -2i(-1 - i\sqrt{3}) = -2\sqrt{3} + 2i$

$\ln(z_1 z_2) = \ln(-2\sqrt{3} + 2i) = \ln|-2\sqrt{3} + 2i| + i\arg(-2\sqrt{3} + 2i)$
$= \ln 4 + i\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \ln 4 + i\frac{5\pi}{6}$
Die Funktionalgleichung der Logarithmusfunktion

$$\ln z_1 + \ln z_2 = \ln 4 - i\frac{7\pi}{6} \neq \ln 4 + i\frac{5\pi}{6} = \ln(z_1 z_2)$$

gilt für den Hauptwert bei diesem Beispiel nicht.

Die Winkel $-\frac{7\pi}{6}$ und $\frac{5\pi}{6}$ beschreiben zwar prinzipiell den gleichen Winkel, jedoch unterscheiden sie sich um einen vollen Umlauf von $2\pi$.

Dies führt dazu, dass $\ln z_1 + \ln z_2$ auf einen Nebenzweig des komplexen Logarithmus führt. Für die Umkehrfunktionen exp gilt natürlich

$$\exp\left(\ln 4 - i\frac{7\pi}{6}\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = z_1 z_2 = \exp\left(\ln 4 + i\frac{5\pi}{6}\right) .$$

b) Mit $z = x + iy$ gilt:

$$\begin{aligned}
\cos z &= \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{-y}(\cos x + i\sin x) + e^{y}(\cos x - i\sin x)\right) \\
&= \cos x \cdot \frac{1}{2}(e^{y} + e^{-y}) - i\sin x\frac{1}{2}(e^{y} - e^{-y}) \\
&= \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y
\end{aligned}$$

$3 = \cos z = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y \quad \Rightarrow \quad \sin x\sinh y = 0$

1.Fall:

$\sinh y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad 3 = \cos x\cosh 0 = \cos x$ keine Lösung

2.Fall:

$\sin x = 0 \;\Rightarrow\; x = k\pi \;\Rightarrow\; 3 = \cos(k\pi)\cosh y \;\Rightarrow\; k = 2n\,,\; y = \pm\text{arcosh}\,3$

$\Rightarrow \quad z_n = 2n\pi \pm i\,\text{arcosh}\,3\,, \quad n \in \mathbb{Z}$

**Aufgabe 6:**

Gegeben sei die Joukowski-Funktion $w = f(z) := \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z}{4} + \dfrac{4}{z}\right)$.

a) Man bestimme die Bilder

   (i) des Kreises $|z| = 5$,

   (ii) des Halbstrahls $\mathrm{Re}(z) < 0$, $\mathrm{Im}(z) = 0$,

   (iii) des Halbstrahls $\mathrm{Re}(z) = 0$, $\mathrm{Im}(z) < 0$.

b) Man berechne die Umkehrfunktion $z = f^{-1}(w)$ für $|z| > 4$.

**Lösung:**

a) (i) Mit der Polardarstellung $z = 5e^{i\varphi}$, $0 \le \varphi < 2\pi$ auf dem Kreis $|z| = 5$ erhält man:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2}\left(\frac{5e^{i\varphi}}{4} + \frac{4}{5e^{i\varphi}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}(\cos\varphi + i\sin\varphi) + \frac{4}{5}(\cos\varphi - i\sin\varphi)\right) \\
&= \underbrace{\left(\frac{5}{8} + \frac{4}{10}\right)\cos\varphi}_{=u} + i\underbrace{\left(\frac{5}{8} - \frac{4}{10}\right)\sin\varphi}_{=v}.
\end{aligned}$$

$u = \mathrm{Re}(f)$ und $v = \mathrm{Im}(f)$ erfüllen die Ellipsengleichung

$$\frac{u^2}{\left(\frac{5}{8} + \frac{4}{10}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\frac{5}{8} - \frac{4}{10}\right)^2} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1\,.$$

Der Kreis $|z| = 5$ wird also auf eine Ellipse abgebildet.

Mathematica Plot-Befehl

```
ParametricPlot[{(5/8 + 4/10) Cos[t],
(5/8 - 4/10) Sin[t]}, {t, 0, 2 Pi},
AxesLabel -> {"Re", "Im"}, PlotRange -> {-1, 1}]
```

Halbachsen:

$$a = \frac{5}{8} + \frac{4}{10} = \frac{41}{40} = 1.025\,, \qquad b = \frac{5}{8} - \frac{4}{10} = \frac{9}{40} = 0.225$$

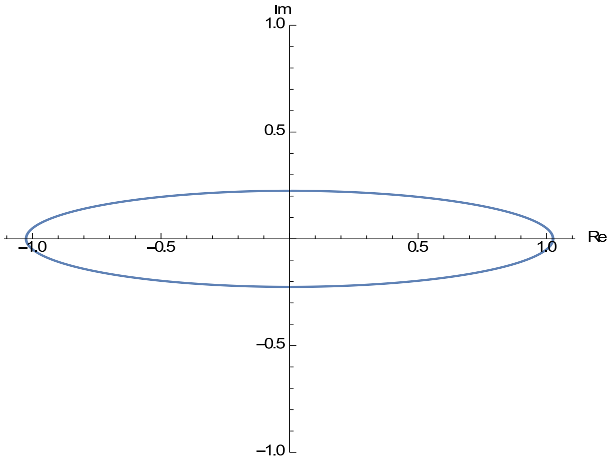



**Bild 6 a)(i):** Ellipse

(ii) Aus der Polardarstellung $z = re^{i\pi} = -r,\ 0 < r < \infty$ des Halbstrahls $\mathrm{Re}(z) < 0$, $\mathrm{Im}(z) = 0$ folgt:

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{-r}{4} + \frac{4}{-r}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{r}{4} + \frac{4}{r}\right) =: g(r)$$

Es $\lim\limits_{r\to 0+} g(r) = -\infty = \lim\limits_{r\to\infty} g(r)$ und

$$0 \geq -\left(\frac{r}{2} - 2\right)^2 = -\frac{r^2}{4} + 2r - 4 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}\left(\frac{r}{4} + \frac{4}{r}\right) \leq -1 .$$

$r = 4$ ist das Maximum von $g$ mit $g(4) = -1$. Natürlich gilt auch
$g'(r) = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{4}{r^2}\right) = -\dfrac{r^2 - 16}{8r^2} = 0 \ \Rightarrow\ r_{1,2} = \pm 4 \ \Rightarrow\ r = 4$.
Das Bildintervall $]-\infty, -1]$ wird also doppelt durchlaufen.

(iii) Aus der Polardarstellung $z = re^{i3\pi/2} = -ir,\ 0 < r < \infty$
des Halbstrahls $\mathrm{Re}(z) = 0$, $\mathrm{Im}(z) < 0$ folgt:

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{-ir}{4} + \frac{4}{-ir}\right) = -\frac{i}{2}\underbrace{\left(\frac{r}{4} - \frac{4}{r}\right)}_{=t} \quad \text{mit} \quad t \in \mathbb{R}$$

Das Bild ist also die imaginäre Achse.

b) Die Umkehrfunktion von $f$ ergibt sich durch Auflösen von $w = f(z)$ nach $z$:
$w = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z}{4} + \dfrac{4}{z}\right) \ \Rightarrow\ 8wz = z^2 + 16$
$\Leftrightarrow\ z^2 - 8wz + 16 = (z - 4w)^2 - 16w^2 + 16 = 0 \ \Leftrightarrow\ (z - 4w)^2 = 16(w^2 - 1)$
Für $|z| > 4$ erhält man damit $z = f^{-1}(w) = 4w + 4\sqrt{w^2 - 1}$.
Für $w = re^{i\varphi}$ mit $-\pi < \varphi < \pi$ wird dabei $\sqrt{w}$ für die rechte $z$-Halbebene durch den Hauptwert und für die linke $z$-Halbebene durch den Nebenwert der Wurzel berechnet

$$\mathrm{HW}: \ \sqrt{w} = \sqrt{r}e^{i\varphi/2}, \quad \mathrm{NW}: \ \sqrt{w} = \sqrt{r}e^{i(\varphi/2+\pi)} = -\sqrt{r}e^{i\varphi/2}.$$

**Aufgabe 7:**

Gegeben sei die Abbildung $T: \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ mit

$$T(z) = \frac{z+2}{z-2} \cdot$$

a) Handelt es sich bei $T$ um eine Möbius-Transformation?

b) Man berechne die Umkehrabbildung.

c) Man bestimme das Bild der reellen Achse.

d) Man bestimme das Bild des Kreises $|z| = 2$.

e) Man bestimme das Bild der imaginären Achse.

f) Wohin wird der Halbkreis $H$ abgebildet?

$$H := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2\,,\ \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$$

**Lösung:**

$$T(z) = \frac{z+2}{z-2} \quad \left(= \frac{az+b}{cz+d}\right) .$$

a) $T$ ist eine Möbius-Transformation, denn $ad - bc = 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 = -4 \neq 0$.

b) Durch Auflösen von $w = \dfrac{z+2}{z-2}$ nach $z$ erhält man die Umkehrabbildung:

$$w(z-2) = z+2 \Rightarrow -2w-2 = z(1-w) \Rightarrow z = T^{-1}(w) = \frac{2w+2}{w-1}$$

c) Für die reelle Achse gilt $z = x \in \mathbb{R}$. Damit erhält man

$$T(z) = T(x) = \frac{x+2}{x-2} \in \mathbb{R} .$$

Also wird die reelle Achse auf sich selbst abgebildet.

d) Wegen $T(2) = \infty$ (Bild ist Gerade), $T(-2) = 0$ (durch Null) und $T(2i) = -i$ handelt es sich beim Bild um die imaginäre Achse.

e) Da die imaginäre Achse symmetrisch zur reellen Achse und zum Kreis $|z| = 2$ ist, gilt diese Symmetrie auch im Bildraum.

Also ist das Bild der imaginären Achse ein echter Kreis um Null, mit Radius $R = |T(2i)| = |-i| = 1$, also der Einheitskreis.

f) Die Kreisscheibe $|z| \leq 2$ wird wegen $T(0) = -1$ auf die linke Halbebene abgebildet, d.h. auf $\mathrm{Re}(w) \leq 0$.

Die obere Halbebene wird wegen $T(2i) = -i$ auf die untere Halbebene abgebildet, d.h. auf $\mathrm{Im}(w) \leq 0$.

Also wird

$$H := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2\,,\ \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$$

auf den dritten Quadranten abgebildet:

$$Q_3 := \{w \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(w) \leq 0\,,\ \mathrm{Im}(w) \leq 0\}\ .$$

**Aufgabe 8:**

Gegeben seien die Punkte

$$z_1 = 1,\ z_2 = 1+2i,\ z_3 = i$$

und

$$w_1 = 0,\ w_2 = 1+i,\ w_3 = -1-i\,.$$

a) Man berechne die Möbius-Transformation $T$, für die mit $j = 1,2,3$ gilt:

$$w_j = T(z_j)\,.$$

b) Liegen $z_0 = 2+i$ und $z_1, z_2, z_3$ auf einem (verallgemeinerten) Kreis $K$?

c) Liegen $w_0 = T(z_0)$ und $w_1, w_2, w_3$ auf einem (verallgemeinerten) Kreis $T(K)$?

**Lösung:**

a) Da $z_j, j = 1,2,3$ voneinander verschieden sind und dies auch für $w_j, j = 1,2,3$ gilt, gibt es genau eine Möbius-Transformation $T$ mit $w_j = T(z_j)$, die man durch Auflösen der Dreipunkteformel nach $w$ erhält:

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} : \frac{w_3-w_1}{w_3-w_2} = \frac{z-z_1}{z-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}\,.$$

Eingesetzt ergibt sich:

$$\frac{w}{w-1-i} : \underbrace{\frac{-1-i}{-1-i-1-i}}_{=1/2} = \frac{z-1}{z-1-2i} : \underbrace{\frac{i-1}{i-1-2i}}_{=1/i} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{2w}{w-1-i} = \frac{i(z-1)}{z-1-2i} \quad \Rightarrow \quad 2w(z-1-2i) = i(z-1)(w-1-i) \quad \Rightarrow$$

$$w(2z-2-4i-i(z-1)) = (1-i)(z-1) \quad \Rightarrow$$

$$w = \frac{(1-i)z-(1-i)}{(2-i)z-2-3i} =: T(z)$$

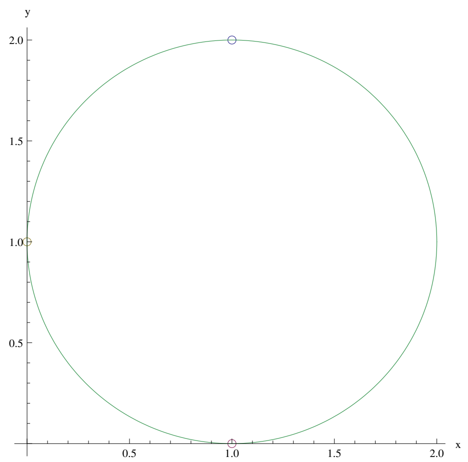
b) Das Doppelverhältnis für $z_0 = 2+i$ ergibt

$$\frac{z_0-z_1}{z_0-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$$
$$= \frac{2+i-1}{2+i-1-2i} : \frac{i-1}{i-1-2i} = \frac{(1+i)(-1-i)}{(1-i)(i-1)} = -1 \in \mathbb{R}$$

Daher liegen $z_0, \ldots, z_3$ auf einem Kreis.

Mit einer Probe stellt man fest, dass es sich um den Kreis $|z-1-i| = 1$ handelt.

c) Antwort 1:
Da Möbius-Transformationen verallgemeinerte Kreise in verallgemeinerte Kreise abbilden, liegen auch $w_0, \dots, w_3$ auf einem verallgemeinerten Kreis (hier: die Winkelhalbierende).



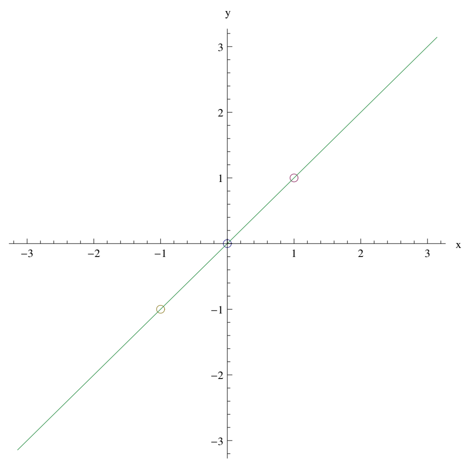




**Bild 8:** $z_1, z_2, z_3$ und $K$ $w_1, w_2, w_3$ und $T(K)$

Antwort 2:
Da $T$ aus der Dreipunkteformel resultiert und $w_0 = T(z_0)$ gilt, erhält man für das Doppelverhältnis von $w_0, \dots, w_3$

$$\frac{w_0 - w_1}{w_0 - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = -1 \in \mathbb{R}\,,$$

d.h. das Doppelverhältnis ändert sich unter $T$ nicht.