Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2020**
Prof. Dr. A. Iske
Dr. K. Rothe ©

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 1

Aufgabe 1:

Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 := \dfrac{5 - i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} - 1$ und $z_2 := -1 + i$.

a) Man ermittle Real- und Imaginärteil von z_1 und die Polardarstellungen von z_1 und z_2.

b) Man bestimme z_2^{12}.

c) Man gebe alle Lösungen der Gleichung $(w - z_2)^4 = -64$ in kartesischen Koordinaten an.

Lösung:

a) $z_1 = \dfrac{5 - i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} - 1 = \dfrac{4}{1 - i\sqrt{3}} = 1 + i\sqrt{3}$

$\Rightarrow \quad \mathrm{Re}(z_1) = 1\,, \quad \mathrm{Im}(z_1) = \sqrt{3}$

$|z_1| = \sqrt{1+3} = 2,$

$\arg(z_1) = \arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{1}\right) = \dfrac{\pi}{3}, \qquad z_1 = 2e^{\pi i/3},$

$z_2 = -1 + i \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}(z_2) = -1\,, \quad \mathrm{Im}(z_2) = 1$

$|z_2| = \sqrt{2}, \qquad \arg(z_2) = \pi + \arctan\left(\dfrac{1}{-1}\right) = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$

$z_2 = \sqrt{2}e^{3\pi i/4}$

b) $z_2^{12} = \left(\sqrt{2}e^{3\pi i/4}\right)^{12} = (\sqrt{2})^{12}\left(e^{3\pi i/4}\right)^{12} = 64e^{9\pi i} = -64$

c) $(w - z_2)^4 = -64 = 64e^{\pi i}$

$\Rightarrow \quad w_k = z_2 + 2\sqrt{2}e^{(\pi i + 2k\pi i)/4} = z_2 + 2\sqrt{2}e^{(2k+1)\pi i/4}\,, \quad k = 0, 1, 2, 3$

$w_0 = z_2 + 2\sqrt{2}e^{\pi i/4} = -1 + i + 2(1 + i) = 1 + 3i,$

$w_1 = z_2 + 2\sqrt{2}e^{3\pi i/4} = -1 + i + 2(-1 + i) = -3 + 3i,$

$w_2 = z_2 + 2\sqrt{2}e^{5\pi i/4} = -1 + i + 2(-1 - i) = -3 - i,$

$w_3 = z_2 + 2\sqrt{2}e^{7\pi i/4} = -1 + i + 2(1 - i) = 1 - i.$

Die vier Lösungen w_k liegen auf einem Kreis um $z_2 = -1 + i$ mit Radius $r = 2\sqrt{2}$.

Aufgabe 2:

Man skizziere die folgenden Punktmengen in der komplexen Zahlenebene:

a) $\{z \in \mathbb{C} : |3z + 6 - i| = 9\}$,

b) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \le \mathrm{Im}(z)\}$,

c) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}((1-i)z) = 2\}$,

d) $\{z \in \mathbb{C} : \pi \le \arg(z) \le 3\pi/2\,,\ 4 \le |z| \le 5\}$.

Lösung:

a) $|3z + 6 - i| = 9 \quad \Leftrightarrow \quad \left|z + 2 - \frac{i}{3}\right| = \left|z - \left(-2 + \frac{i}{3}\right)\right| = 3$

Alle z liegen auf einem Kreis um $z_2 = -2 + \frac{i}{3}$ mit Radius $r = 3$.

In kartesischen Koordinaten $z = x + iy$ erhält man die Darstellung:

$$\begin{aligned} \left|z + 2 - \frac{i}{3}\right| &= \left|x + iy + 2 - \frac{i}{3}\right| = \left|x + 2 + i\left(y - \frac{1}{3}\right)\right| \\ &= \sqrt{(x+2)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2} = 3 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+2)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = 3^2\,, \qquad \text{Radius } r = 3\,,\ \text{Mittelpunkt } \left(-2, \frac{1}{3}\right).$$

b) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \le \mathrm{Im}(z)\}$

Mit $z = x + iy$ erhält man $x \le y$, also die Halbebene oberhalb der Winkelhalbierenden $x = y$.

c)

$$\begin{aligned} 2 &= \mathrm{Re}((1-i)z) = \mathrm{Re}((1-i)(x+iy)) \\ &= \mathrm{Re}(x + y + i(-x+y)) = x + y \end{aligned}$$

Die Punktmenge wird also durch folgende Gerade beschrieben:

$$y = -x + 2\,.$$

d) $\{z \in \mathbb{C} : \pi \le \arg(z) \le 3\pi/2\,,\ 4 \le |z| \le 5\}$ ist der Viertelkreisring im dritten Quadranten mit Radius $4 \le r \le 5$.

Aufgabe 3:

a) Man untersuche die Folge

$$z_0 = 3\,, \quad z_{n+1} = \frac{3-2i}{4}\,(1+2i+z_n)$$

auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert.

b) Für eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit $D \subset \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in D$ zeige man die folgende Äquivalenz:

$$f \text{ ist stetig in } z_0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f) : D \to \mathbb{R} \text{ sind stetig in } z_0\,.$$

Lösung:

a) Wenn z_n konvergiert, so gilt mit $z^* := \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_{n+1}$:

$$z^* = \frac{3-2i}{4}\,(1+2i+z^*)$$

$$\Rightarrow \quad z^*\left(1-\frac{3-2i}{4}\right) = z^*\left(\frac{1+2i}{4}\right) = \frac{(1+2i)(3-2i)}{4}$$

$$\Rightarrow \quad z^* = 3-2i.$$

z_n konvergiert, da

$$\begin{aligned}
|z_{n+1}-z^*| &= |z_{n+1}-(3-2i)| = \left|\frac{3-2i}{4}\,(1+2i+z_n)-(3-2i)\right| \\
&= \left|\frac{3-2i}{4}\right| |1+2i+z_n-4| = \frac{\sqrt{13}}{4}\,|z_n-(3-2i)| \\
&= \left(\frac{\sqrt{13}}{4}\right)^2 |z_{n-1}-(3-2i)| \\
&\vdots \\
&= \left(\frac{\sqrt{13}}{4}\right)^{n+1} |z_0-(3-2i)| = 2\left(\frac{\sqrt{13}}{4}\right)^{n+1} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

b) Gegeben sei eine beliebige Zahlenfolge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_n \in D$ und $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, dann gilt (vgl. auch Hörsaalübung 3 b))

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}f(z_0) + i\,\mathrm{Im}f(z_0) &= f(z_0) = f(\lim_{n\to\infty} z_n) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}f(z_n) + i \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}f(z_n)
\end{aligned}$$

Damit erhält man $\mathrm{Re}f(z_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Re}f(z_n)$ und $\mathrm{Im}f(z_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Im}f(z_n)$.

Aufgabe 4:

a) Man bestimme das Bild von

$$K := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \le \mathrm{Re}(z)\ ,\ 0 \le \mathrm{Im}(z)\ ,\ \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 \le 1\}$$

unter der durch $f(z) = ((1+i)z)^2$ definierten Abbildung.

b) Gegeben seien $z_1 = 2 + \dfrac{\pi i}{3}$ und $z_2 = -1 + \dfrac{2\pi i}{3}$. Man berechne

$$\exp(z_1)\ ,\ \exp(z_2) \ \text{ und } \ \exp(z_1 + z_2)$$

in kartesischen Koordinaten und bestätige an diesem Beispiel die Gültigkeit der Funktionalgleichung der e-Funktion in $\mathbb{C}$:

$$\exp(z_1) \cdot \exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)\ .$$

Lösung:

a) K beschreibt den ersten Quadranten des Einkeitkreises, also $z = re^{i\varphi}$ mit $0 \le r \le 1$ und $0 \le \varphi \le \pi/2$

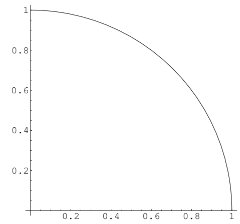

Bild 4.a.1) $K := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \le \mathrm{Re}(z)\ ,\ 0 \le \mathrm{Im}(z)\ ,\ \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 \le 1\}$

Die Abbildung $f(z) = ((1+i)z)^2$ wird interpretiert als Hintereinanderausführung $f = f_2 \circ f_1$ mit $f_1(z) = (1+i)z$ und $f_2(u) = u^2$.

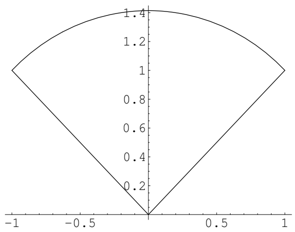

Bild 4.a.2) $f_1(K)$

Die Funktion $f_1(z) = (1+i)z = \sqrt{2}e^{\pi i/4}re^{\varphi i} = r\sqrt{2}e^{(\pi/4+\varphi)i}$ bewirkt eine Streckung um den Faktor $\sqrt{2}$ und eine Drehung um den Winkel $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

$f_1(K)$ ist also ein Viertelkreis mit Radius $r = \sqrt{2}$ und gedreht um $\pi/4$.

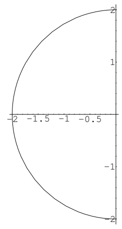

Bild 4.a.3) $\quad f(K) = f_2(f_1(K))$

Die Funktion $f_2(u) = u^2 = \left(re^{\psi i}\right)^2 = r^2 e^{2\psi i}$ verdoppelt den Winkel und quadriert den Abstand vom Nullpunkt.

$f(K)$ ist also der Halbkreis mit Radius $r = 2$ in der linken Halbebene.

Alternative Hintereinanderausführung von f:
Für $f(z) = ((1+i)z)^2 = 2iz^2$ kann man auch $f = f_4 \circ f_3$ mit $f_3(z) = z^2$ und $f_4(u) = 2iu$ deuten. Dann ergibt sich

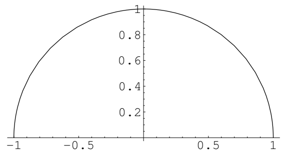

Bild 4.a.4) $\quad f_3(K)$

Die Funktion $f_4(u) = 2iu = e^{\pi i/2} r e^{\varphi i} = 2re^{(\pi/2+\varphi)i}$ bewirkt eine Streckung um den Faktor 2 und eine Drehung um den Winkel $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

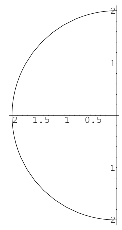

Bild 4.a.5) $\quad f(K) = f_4(f_3(K))$

b) $$\exp(z_1) = \exp\left(2 + \frac{\pi i}{3}\right) = e^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{e^2}{2} + i\frac{e^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\exp(z_2) = \exp\left(-1 + \frac{2\pi i}{3}\right) = e^{-1}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = -\frac{1}{2e} + i\frac{\sqrt{3}}{2e}$$

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(1 + \pi i) = e\left(\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right) = -e$$

Damit erhält man

$$\exp(z_1)\exp(z_2) = e^2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{e}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -e = \exp(z_1 + z_2)\,.$$