Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2020**
Dr. K. Rothe ©

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 3

Möbius-Transformationen:

Kreissymmetrie

Für zwei Punkte z_1 und z_2, die zum Kreis

$$K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = R\}$$

mit Radius R und Mittelpunkt z_0 symmetrisch liegen gilt:

a) Ein Punkt z_1 mit $|z_1 - z_0| \leq R$ ist symmetrisch zu genau einem Punkt z_2 mit $|z_2 - z_0| \geq R$.

b) Gilt $|z_1 - z_0| = R$ für einen Punkt z_1, so ist er zu sich selbst symmtrisch, d.h. es gilt $z_1 = z_2$.

c) $z_1 = z_0$ ist symmetrisch zu $z_2 = \infty$.

d) Es gilt $(z_1 - z_0)(\bar{z}_2 - \bar{z}_0) = R^2$.

Aufgabe 9:

a) Für die Kreise $K_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-3i| = 2\}$ und $K_2 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z+3i| = 2\}$ berechne man die Punkte z_1 und z_2, die symmetrisch zu beiden Kreisen liegen.

b) Man gebe eine Möbius-Transformation T an, mit:

$$T(i\sqrt{5}) = 0\,, \quad T(-i\sqrt{5}) = \infty \quad \text{und} \quad T(i) = 1\,.$$

c) Zur imaginären Achse und den Kreisen K_1 und K_2 bestimme man die (verallgemeinerten) Bildkreise unter T, gegebenenfalls mit ihren Radien.

Lösung

a) Die Symmetriebedingung zu K_1

$(z_1 - 3i)(\bar{z}_2 + 3i) = 2^2 \quad \Rightarrow \quad \bar{z}_2 = \dfrac{4}{z_1 - 3i} - 3i$

eingesetzt in die Symmetriebedingung zu K_2 ergibt

$2^2 = (z_1 + 3i)(\bar{z}_2 - 3i) = (z_1 + 3i)\left(\dfrac{4}{z_1 - 3i} - 3i - 3i\right) \Rightarrow$

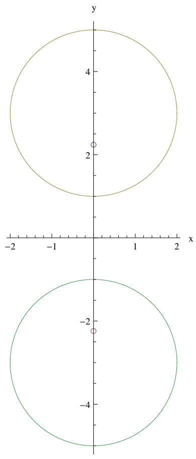
$4(z_1 - 3i) = (z_1 + 3i)(4 - 6i(z_1 - 3i))$
$= 4z_1 + 12i - 6i(z_1 + 3i)(z_1 - 3i)$
$\Rightarrow\ -24i = -6i(z_1^2 + 9) \ \Rightarrow\ z_1 = \pm i\sqrt{5}$
$\Rightarrow\ \bar{z}_2 = \dfrac{4}{\pm i\sqrt{5} - 3i} - 3i = \pm i\sqrt{5} \ \Rightarrow\ z_2 = \bar{z}_1 = -z_1 = \mp i\sqrt{5}$

b) Mit $T(z) = k\dfrac{z - i\sqrt{5}}{z + i\sqrt{5}}$ sind die Bedingungen $T(z_1) = 0$ und $T(z_2) = \infty$ erfüllt.

$$1 = T(i) = k\frac{i - i\sqrt{5}}{i + i\sqrt{5}} \ \Rightarrow\ k = \frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} \ \Rightarrow\ T(z) = \frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} \cdot \frac{z - i\sqrt{5}}{z + i\sqrt{5}}$$

c) Das Bild der imaginären Achse ($z = iy$) ist die reelle Achse, denn

$$T(iy) = \frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} \cdot \frac{iy - i\sqrt{5}}{iy + i\sqrt{5}} \in \mathbb{R}\,.$$



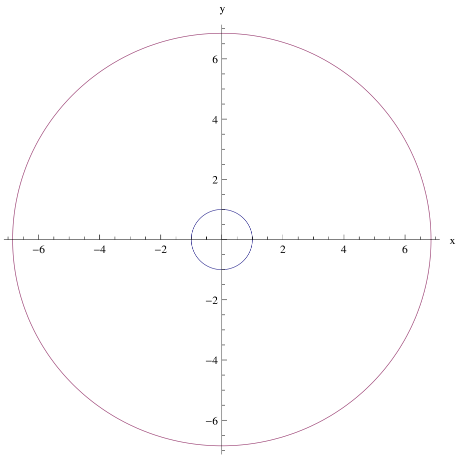


Bild 9: K_1 und K_2 mit z_1 und z_2 $\qquad$ $T(K_1)$und $T(K_2)$

Nach a) liegen z_1 und z_2 symmetrisch zu K_1 und K_2 und nicht auf K_1 und K_2. Also sind auch $T(z_1) = 0$ und $T(z_2) = \infty$ symmetrisch zu den Bildkreisen $T(K_1)$ und $T(K_2)$. Damit müssen $T(K_1)$ und $T(K_2)$ Kreise um den Ursprung sein.

Radien $R_{1,2}$ von $K_{1,2}$:

$$i \in K_1 \;\Rightarrow\; R_1 = |T(i)| = 1$$

$$-i \in K_2 \;\Rightarrow\; R_2 = |T(-i)| = \left|\frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} \cdot \frac{-i - i\sqrt{5}}{-i + i\sqrt{5}}\right| = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\right)^2 = k^2$$

Differentialrechnung im Komplexen:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $z = x + iy$ und $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Sind die Funktionen u und v stetig partiell differenzierbar in einer (offenen) Umgebung von $z_0 = x_0 + iy_0$, so werden die folgenden partiellen Ableitungen für f erklärt:

$$f_x(z_0) = f_x(x_0, y_0) = u_x(x_0, y_0)+iv_x(x_0, y_0), \quad f_y(z_0) = f_y(x_0, y_0) = u_y(x_0, y_0)+iv_y(x_0, y_0).$$

Aufgabe 10:

Für $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^2$ berechne man

a) $A := \frac{1}{2}\,(f_x(z_0) - i f_y(z_0))$ und

b) $B := \frac{1}{2}\,(f_x(z_0) + i f_y(z_0))$.

Man vergleiche die Ergebnisse mit den Ableitungen von $f(z, \bar{z}) = z^2$ nach den unabhängigen Variablen z und $\bar{z}$, also mit

$$\frac{\partial f}{\partial z}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,.$$

Dabei sollen die bekannten Ableitungsregeln aus dem Reellen rein formal übertragen werden.

Lösung

f besitzt folgende Zerlegung in Real- und Imaginärteil

$$f(z_0) = z_0^2 = (x_0 + iy_0)^2 = x_0^2 - y_0^2 + i2x_0y_0 = f(x_0, y_0)\,.$$

Man erhält

$$f_x(z_0) = f_x(x_0, y_0) = 2x_0 + i2y_0\,, \quad f_y(z_0) = f_y(x_0, y_0) = -2y_0 + i2x_0$$

a) $A = \frac{1}{2}\,(f_x(z_0) - i f_y(z_0)) = \frac{1}{2}\,(2x_0 + i2y_0 - i(-2y_0 + i2x_0)) = 2x_0 + i2y_0 = 2z_0$

Durch rein formales Differenzieren wie im Reellen erhält man $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = 2z_0\,.$

b) $B = \frac{1}{2}\,(f_x(z_0) + i f_y(z_0)) = \frac{1}{2}\,(2x_0 + i2y_0 + i(-2y_0 + i2x_0)) = 0$

Durch rein formales Differenzieren wie im Reellen erhält man $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0\,.$

Holomorphe Funktionen

Eine Abbildung $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt **holomorph**, wenn sie in jedem Punkt z_0 des Gebietes D **komplex differenzierbar** ist, d.h. es existiert

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Eigenschaften:

a) $f = u+iv$ ist in $z_0 \in D$ genau dann komplex differenzierbar, wenn die **Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen** gelten

$$\begin{pmatrix} u_x(z_0) \\ u_y(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y(z_0) \\ -v_x(z_0) \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} v_x(z_0) \\ v_y(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_y(z_0) \\ u_x(z_0) \end{pmatrix}$$

und $f = (u, v)^T$ total differenzierbar ist.

b) $f = u + iv$ ist in $z_0 \in D$ genau dann komplex differenzierbar, wenn

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$$

gilt und $f = (u, v)^T$ total differenzierbar ist.

c) Ist $f(z)$ reellwertig und holomorph auf D, dann ist f konstant.

d) Für holomorphe Funktionen gelten die bekannten Differentiationsregeln.

e) Polynome, Potenzreihen, rationale Funktionen, trigonometrische Funktionen und Exponentialfunktion sind in ihrem Definitions- bzw. Konvergenzbereich holomorph.

f) Für holomorphe Funktionen $f = u + iv$ gilt: $\quad \Delta u = 0$ und $\Delta v = 0$.

Aufgabe 11:

a) Man überprüfe, ob

(i) $f(z) = z \cdot \mathrm{Im}(z)$ holomorph ist,

(ii) $g(z) = 2z + 2\bar{z} + 4i \cdot \mathrm{Im}(z) - 3i$ holomorph ist,

(iii) $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 - 6xy - 3x^2$ harmonisch ist.

b) Man zeige, dass

$$u(x,y) = 4x^2 - 4y^2 - 12x + 9$$

harmonisch ist und konstruiere eine zu u konjugiert harmonische Funktion $v(x,y)$, d.h. eine Funktion v, für die die Funktion $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ mit $z = x + iy$ holomorph wird.

Lösung:

a) (i) $f(z) = z \cdot \mathrm{Im}(z) = (x+iy)y = \underbrace{xy}_{=u(x,y)} + i \underbrace{y^2}_{=v(x,y)}$

Wegen $u_x = y \neq 2y = v_y$ sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen nicht erfüllt und f ist nicht holomorph.

(ii) Mit $z = x + iy$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} g(z) &= 2z + 2\bar{z} + 4i\mathrm{Im}z - 3i \\ &= 2(x+iy) + 2(x-iy) + 4iy - 3i \;=\; 4x + i(4y-3) \end{aligned}$$

Da Re $g(z) = 4x =: u(x,y)$ und
Im $g(z) = 4y - 3 =: v(x,y)$ stetig partiell differenzierbar sind und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen

$$u_x = 4 = v_y \,, \quad v_x = 0 = -u_y$$

ist g holomorph.

(iii)
$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= (x^3 - 3xy^2 - 6xy - 3x^2)_{xx} + (x^3 - 3xy^2 - 6xy - 3x^2)_{yy} \\ &= 6x - 6 - 6x = -6 \end{aligned}$$

Damit ist u nicht harmonisch.

b) $\Delta u \;=\; (4x^2 - 4y^2 - 12x + 9)_{xx} + (4x^2 - 4y^2 - 12x + 9)_{yy} = 8 - 8 = 0$

Damit $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ holomorph in $\mathbb{C}$ ist, müssen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sein:

$$v_y = u_x = 8x - 12 \quad \Rightarrow \quad v = 8xy - 12y + c(x)$$

$$v_x = 8y + c'(x) = -u_y = -(-8y)$$

$$\Rightarrow \quad c'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad c(x) = c \in \mathbb{R}$$

Da $v(x,y) = 8xy - 12y + c$ (und auch u) stetig partiell differenzierbar ist, ist f holomorph in $\mathbb{C}$ und v eine (die) konjugiert harmonische Funktion zu u.

Bemerkung:

Für $f(z) = (2z-3)^2$ und $c = 0$ ergibt sich $u(x,y) = \mathrm{Re}f$ und $v(x,y) = \mathrm{Im}f$.

konforme Abbildungen

Ist $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph im Gebiet D mit $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in D$, dann wird f **konform** genannt.

Eigenschaften

a) Schneiden sich im Punkt z_0 zwei Kurve c_1 und c_2, so bleiben unter $w = f(z)$ Schnittwinkel erhalten, d.h., mit $z_0 = c_1(t_1) = c_2(t_2)$ und $d_i(t) := f(c_i(t))$ gilt:

$$\gamma = \angle(\dot{c}_2(t_2), \dot{c}_1(t_1)) = \arg \dot{c}_2(t_2) - \arg \dot{c}_1(t_1) \;\Rightarrow\; \gamma = \angle(\dot{d}_2(t_2), \dot{d}_1(t_1)) \;.$$

Diese Eigenschaft wird als **winkeltreu** bezeichnet.

b) Für alle von z_0 ausgehende Richtungen gibt $|f'(z_0)|$ den gemeinsamen Verzerrungsfaktor an, denn es gilt die Kettenregel:

$$\dot{d}(t) = f'(c(t)) \cdot \dot{c}(t) \;.$$

Insbesondere bleiben lokal die Längenverhältnisse erhalten.

Aufgabe 12:

Gegeben seien die Kurven $c_1(t) = t$ für $t > 0$ und $c_2(t) = 4e^{it}$ für $-\pi < t < \pi$.

a) Man skizziere die Kurven c_1 und c_2 in der z-Ebene und bestimme ihren Schnittpunkt mit Schnittwinkel.

b) In welche Bildkurven der w-Ebene gehen c_1 und c_2 unter dem Hauptwert von $w = \sqrt{z}$ über? Man überprüfe, ob im Schnittpunkt der Bildkurven der Winkel und das lokale Längenverhältnis erhalten bleiben.

Lösung:

Der Hauptwert der Wurzelfunktion für $z = re^{i\varphi}$ ist festgelegt durch

$$w = \sqrt{z} := \sqrt{r}e^{i\varphi/2} \quad \text{mit} \quad -\pi < \varphi < \pi.$$

a) $c_1(t) = t$ für $t > 0$: positive reelle Achse
$c_2(t) = 4e^{it}$ für $-\pi < t < \pi$:
Kreis vom Radius $r = 4$ ohne den Punkt $z = -4$.
Schnittpunkt z_s von c_1 und c_2: $c_1(4) = 4 = z_s = c_2\,(0)$

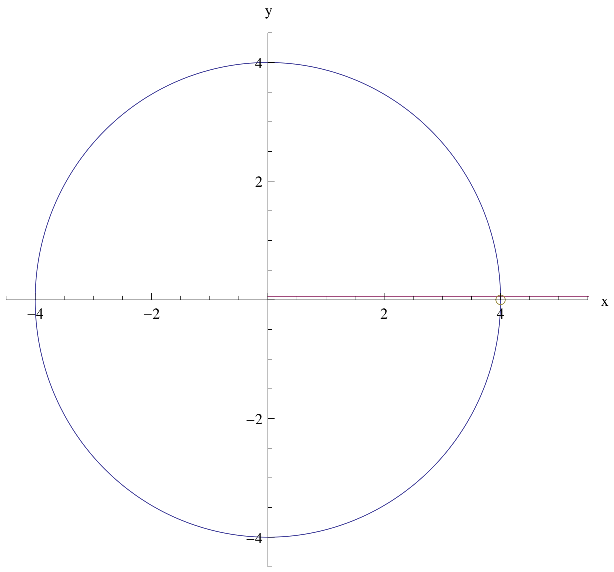


Bild 12 a): $c_1(t)$, $c_2(t)$ und Schnittpunkt $z_s = 4$ in der z-Ebene

Ableitungen der Kurven in den Schnittpunkten:
$\dot{c}_1(t) = 1 \;\Rightarrow\; \dot{c}_1(4) = 1 = 1e^{i\cdot 0}$ und
$\dot{c}_2(t) = 4ie^{it} \;\Rightarrow\; \dot{c}_2\,(0) = 4i = 4e^{i\pi/2}$
Schnittwinkel:
$\gamma = \angle\left(\dot{c}_2\,(0)\,,\dot{c}_1(4)\right) = \arg \dot{c}_2\,(0) - \arg \dot{c}_1(4)$
$= \arg(4i) - \arg 1 = \dfrac{\pi}{2} - 0 = \dfrac{\pi}{2}$

b) Für die Bildkurven erhält man:
$d_1(t) := \sqrt{c_1(t)} = \sqrt{t}$ mit $t > 0$: positive reelle Achse
$d_2(t) := \sqrt{c_2(t)} = 2e^{it/2}$ für $-\pi < t < \pi$:
Halbkreis vom Radius $r = 2$ in der rechten Halbebene (ohne die Punkte $w = \pm 2i$).
Schnittpunkt: $d_1(4) = 2 = d_2\,(0)$

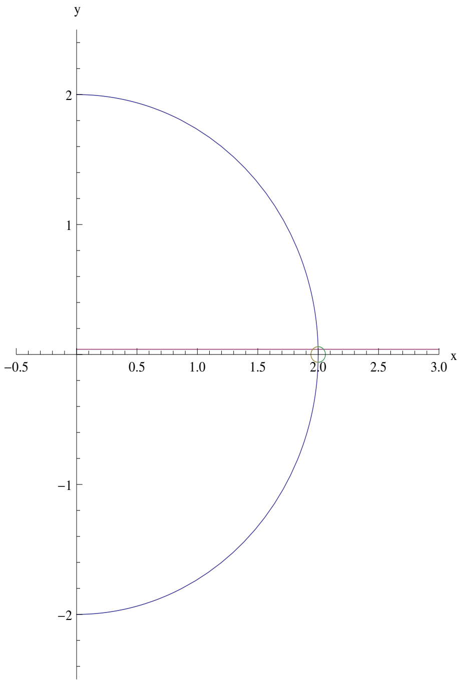


Bild 12 b): $d_1(t)$, $d_2(t)$ und Schnittpunkt $w_s = \sqrt{z_s} = 2$ in der w-Ebene

Ableitungen der Bildkurven in den Schnittpunkten:

$\dot{d}_1(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} \Rightarrow \dot{d}_1(4) = \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}e^{i\cdot 0}$ und

$\dot{d}_2(t) = ie^{it/2} \Rightarrow \dot{d}_2\,(0) = i = e^{i\pi/2}$

Schnittwinkel:

$\tilde{\gamma} = \angle\left(\dot{d}_2\,(0)\,, \dot{d}_1(4)\right) = \arg \dot{d}_2\,(0) - \arg \dot{d}_1(4)$

$= \arg(i) - \arg 1/4 = \dfrac{\pi}{2} - 0 = \dfrac{\pi}{2}$

lokales Längenverhältnis: $\dfrac{|\dot{c}_2\,(0)\,|}{|\dot{c}_1(4)|} = \dfrac{|4i|}{|1|} = 4 = \dfrac{|i|}{|1/4|} = \dfrac{|\dot{d}_2\,(0)\,|}{|\dot{d}_1(4)|}$

Bemerkung:

Der Streckungsfaktor $f'(c(t))$, der in

$$\dot{d}(t) = \frac{d}{dt}\left(f(c(t))\right) = f'(c(t))\dot{c}(t)$$

steckt, kürzt sich im Schnittpunkt heraus.

Der Schnittwinkel und das lokale Längenverhältnis bleiben erhalten, da die Kurven im Holomorphiegebiet von $\sqrt{z}$ verlaufen und dort $f'(z) = \dfrac{1}{2\sqrt{z}} \neq 0$ gilt.