

## Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften Blatt 7: Präsenzaufgaben

### Aufgabe 1:

- a) Wie viele verschiedene Laurent-Reihen gibt es für die folgenden Funktionen zu den jeweils angegebenen Entwicklungspunkten  $z_0$ ?

$$(i) \quad f_1(z) = \frac{2z - 7}{z^2 + 3z - 4}, \quad z_0 = 0,$$

$$(ii) \quad f_2(z) = \frac{\cos(z) - 2}{z^2}, \quad z_0 = 0.$$

- b) Klassifizieren Sie die isolierten Singularitäten der Funktionen aus Teil a) und berechnen Sie die zugehörigen Residuen.
- c) Geben Sie die Partialbruchzerlegung von  $f_1$  an.

### Lösungsskizze zur Aufgabe 1:

$$a) \quad (i) \quad f_1(z) = \frac{2z - 7}{z^2 + 3z - 4}, \quad z_0 = 0.$$

Wegen  $z^2 + 3z - 4 = (z + 4)(z - 1)$  gibt es drei Laurentreihen. Jeweils eine in:

$$R_1 : 0 < |z - z_0| < 1, \quad R_2 : 1 < |z - z_0| < 4, \quad R_3 : 4 < |z - z_0|.$$

- (ii) Die einzige mögliche Singularität liegt in  $z_0 = 0$ . Es gibt nur eine Laurentreihe.

$$\begin{aligned} f_2(z) &= \frac{\cos(z) - 2}{z^2} = -\frac{2}{z^2} + \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \\ &= -\frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2(k-1)} \quad 0 < |z| < \infty. \end{aligned}$$

b) (i)  $f_1(z) = \frac{2z-7}{(z+4)(z-1)}$  hat die einfachen Pole  $z_1 = -4$  und  $z_2 = 1$ .

$$\operatorname{Res} f_1(-4) = \left[ \frac{2z-7}{z-1} \right]_{z=-4} = \frac{-8-7}{-4-1} = 3$$

$$\operatorname{Res} f_1(1) = \left[ \frac{2z-7}{z+4} \right]_{z=1} = \frac{2-7}{1+4} = -1$$

(ii) Nach Teil a) gilt

$$f_2(z) = \frac{\cos(z) - 2}{z^2} = -\frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2(k-1)} \quad 0 < |z| < \infty. \text{ Es liegt}$$

ein Pol zweiter Ordnung in  $z_0 = 0$  vor. Man liest aus der Reihendarstellung ab:  $\operatorname{Res}(f_2; 0) = 0$ .

Alternativ:

$$\operatorname{Res}(f_2; 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \left( (z-0)^2 f_2(z) \right)' = [(\cos(z) - 2)']_{z=0} = -\sin(0) = 0.$$

c) Nach a) und b) folgt

$$f_1(z) = \frac{3}{z+4} + \frac{-1}{z-1}.$$

**Aufgabe 2)**

Gegeben ist  $f(z) = \frac{1}{z^2 - 6z + 10}$ .

- Bestimmen und klassifizieren Sie alle isolierten Singularitäten von  $f$ .
- Berechnen Sie die Residuen aller isolierten Singularitäten der Funktion  $f$ .
- In welcher Kreisscheibe um  $z_0 = 0$  konvergiert die Taylor Reihe von  $f$  zum Entwicklungspunkt  $z_0 = 0$  gegen  $f$ ?
- Berechnen Sie die folgenden Integrale, sofern diese definiert sind.

$$\text{i) } \int_{\Gamma_1} f(z) dz, \quad \Gamma_1 := \{z(t) := 2e^{it} \mid t \in [0, 2\pi]\},$$

$$\text{ii) } \int_{\Gamma_2} f(z) dz, \quad \Gamma_2 := \{z(t) := i + 3e^{it} \mid t \in [0, 2\pi]\},$$

$$\text{iii) } \int_{\Gamma_3} f(z) dz, \quad \Gamma_3 := \{z(t) := 3 - 2i + 2e^{it} \mid t \in [0, 4\pi]\},$$

$$\text{iv) } \int_{\Gamma_4} f(z) dz, \quad \Gamma_4 := \{z(t) := 3 - 2i + 2e^{-it} \mid t \in [0, 2\pi]\},$$

$$\text{v) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 6x + 10} dx.$$

**Lösungsskizze zur Aufgabe 2)**  $f(z) = \frac{1}{z^2 - 6z + 10}$ .

- a) Nennernullstellen:  $(z - 3)^2 + 1 = 0 \iff z_{1,2} = 3 \pm i$ .

$$f(z) = \frac{1}{(z - (3 + i))(z - (3 - i))}.$$

In  $z_{1,2}$  liegen einfache Pole vor. **[1 Punkt]**

- b) Residuen

$$\text{Res } f(3 + i) = \left[ \frac{1}{z - (3 - i)} \right]_{z=3+i} = \frac{1}{3 + i - (3 - i)} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}. \quad \text{[1 Punkt]}$$

$$\text{Res } f(3 - i) = \left[ \frac{1}{z - (3 + i)} \right]_{z=3-i} = \frac{1}{3 - i - (3 + i)} = \frac{1}{-2i} = \frac{i}{2}. \quad \text{[1 Punkt]}$$

- c) Die Taylor Reihe konvergiert im größten Kreis um Null, in dem  $f$  analytisch ist, also in der Kreisscheibe

$$|z - 0| < |z - (3 \pm i)| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}.$$

d) Integrale sofern diese definiert sind.

$$(i) \Gamma_1 := \{z(t) := 2e^{it} \mid t \in [0, 2\pi]\},$$

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = 0 \quad (\text{CIS}) \quad [1 \text{ Punkt}]$$

$$(ii) \Gamma_2 := \{z(t) := i + 3e^{it} \mid t \in [0, 2\pi]\},$$

$$\oint_{\Gamma_2} f(z) dz, \text{ ist nicht definiert, da } z_1 = 3 + i \text{ auf der Kurve liegt.} \quad [1 \text{ Punkt}]$$

$$(iii) \Gamma_3 := \{z(t) := 3 - 2i + 2e^{it} \mid t \in [0, 4\pi]\},$$

$$\oint_{\Gamma_3} f(z) dz, = Uml(\Gamma_3, 3 - i)2\pi i \operatorname{Res} f(3 - i) = -2\pi. \quad [1 \text{ Punkt}]$$

$$(iv) \Gamma_4 := \{z(t) := 3 - 2i + 2e^{-it} \mid t \in [0, 2\pi]\},$$

$$\oint_{\Gamma_4} f(z) dz, = Uml(\Gamma_4, 3 - i)2\pi i \operatorname{Res} f(3 - i) = \pi \quad [1 \text{ Punkt}]$$

$$(v) c_5 = \mathbb{R},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 6x + 10} dx = 2\pi i \operatorname{Res} f(3 + i) = \pi. \quad [1 \text{ Punkt}]$$

**Bearbeitungstermine:** 08.07.19 - 12.07.19