Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2019**
Prof. Dr. T. Reis, Dr. P. Kiani

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 7: Hausaufgaben

Aufgabe 1:

a) Bestimmen Sie alle isolierten Singularitäten der Funktionen

$$g(z) = \frac{2+3z+z^2}{(z^2+4)(z^2-1)}, \qquad f(z) = \frac{1+z-z^2+iz^3}{z^2(z+i)}$$

und klassifizieren Sie diese.

b) Berechnen Sie die komplexen Partialbruchzerlegungen der Funktionen aus Teil a). Was hätten Sie in Analysis II als Partialbruchzerlegung von g erhalten?

Lösungshinweise zur Aufgabe 1:

a) $g(z) = \dfrac{2+3z+z^2}{(z^2+4)(z^2-1)} = \dfrac{(1+z)(2+z)}{(z^2+4)(z+1)(z-1)}$.

g hat eine hebbare Singularität bei $z=-1$ und die einfachen Pole $z_1 = 1,\ z_2 = 2i,\ z_3 = -2i$.

Es gilt $\quad f(z) = \dfrac{1+z-z^2+iz^3}{z^2(z+i)} = i + \dfrac{1+z}{z^2(z+i)}$

f hat einen einfachen Pol in $z=-i$ und einen Pol zweiter Ordnung in $z=0$.

b) g hat eine hebbare Singularität bei $z=-1$ und die einfachen Pole $z_1 = 1,\ z_2 = 2i,\ z_3 = -2i$. Außerdem verschwindet g im Unendlichen. Mit den entsprechenden Hauptteilen gilt also

$$g(z) = h_1(z) + h_2(z) + h_3(z)$$

Es gilt

$$g(z) = \frac{1}{z-1}\,\frac{(1+z)(2+z)}{(z^2+4)(z+1)} \Longrightarrow Res\, g(1) = \left[\frac{2+z}{z^2+4}\right]_{z=1} = \frac{3}{5}$$

$$h_1(z) = \frac{k(1)}{z-1} = \frac{3}{5}\,\frac{1}{z-1}$$

Analog erhält man

$$h_2(z) = \frac{1}{z-2i}\left[\frac{2+z}{(z+2i)(z-1)}\right]_{z=2i} = -\frac{3+i}{10}\,\frac{1}{z-2i}$$

sowie

$$h_3(z) \;=\; \frac{1}{z+2i}\left[\frac{2+z}{(z-2i)(z-1)}\right]_{z=-2i} \;=\; \frac{i-3}{10}\,\frac{1}{z+2i}$$

Die komplexe Partialbruchzerlegung lautet also

$$g(z) \;=\; \frac{3}{5}\,\frac{1}{z-1} \;-\; \frac{3+i}{10}\,\frac{1}{z-2i} \;-\; \frac{3-i}{10}\,\frac{1}{z+2i}$$

und die reelle Partialbruchzerlegung, die man in Analysis II erhalten hätte lautet:

$$g(z) \;=\; \frac{3}{5}\,\frac{1}{z-1} \;-\; \frac{3z-2}{5(z^2+4)}$$

****

f verschwindet nicht im Unendlichen. Also machen wir erst eine Polynomdivision:

$$f(z) \;=\; \frac{1+z-z^2+iz^3}{z^2(z+i)} \;=\; i+\frac{1+z}{z^2(z+i)}$$

Dann bestimmen wir die Hauptteile zum gebrochen rationalen Teil von f in Null und $-i$. In Null gilt

$$\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1+z}{z+i} \;=\; \frac{1}{z^2}\tau(z)$$

mit einer in der Nähe von Null holomorphen (also in eine Taylorreihe entwickelbaren) Funktion τ. Den Hauptteil bei Entwicklung um Null erhalten wir als

$$h_0(z) = \frac{1}{z^2}\left(\tau(0)+\tau'(0)(z-0)\right) \;=\; \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{i}+\left.\frac{z+i-1-z}{(z+i)^2}\right|_{z=0}\cdot z\right) = -\frac{i}{z^2}+\frac{1-i}{z}$$

Den Hauptteil für $z=-i$ erhält man wieder über die Berechnung des Residuums:

$$h_{-i}(z) = \frac{Res\ h(-i)}{z+i} \;=\; \frac{1}{z+i}\left(\left.\frac{1+z}{z^2}\right|_{z=-i}\right) = \frac{i-1}{z+i}$$

Damit lautet die komplexe PBZ

$$f(z) = i+h_0(z)+h_{-i}(z) = \; i-\frac{i}{z^2}+\frac{1-i}{z}+\frac{i-1}{z+i}$$

Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie diejenige Laurent-Entwicklung der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 8z + 25}$$

zum Entwicklungspunkt $z_0 = 4 - 3i$, die in der Umgebung des Punktes $z^* = 5i$ gegen $f(z)$ konvergiert.

b) Gegeben ist

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 2iz + 3} .$$

Bestimmen Sie diejenige Laurent-Entwicklung der Funktion f zum Entwicklungspunkt $z_0 = 0$, die in der Umgebung des Punktes $z^* = 2i$ gegen $f(2i)$ konvergiert.

Lösung: $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 8z + 25} .$

a) Nennernullstellen: $(z-4)^2 + 9 = 0 \iff z_{1,2} = 4 \pm 3i$.

$$f(z) = \frac{1}{(z-(4+3i))(z-(4-3i))} .$$

In $z_{1,2}$ liegen einfache Pole vor.

Wir suchen also die Laurent-Reihe für $|z - z_0| > 6$ mit Entwicklungspunkt $z_0 = 4 - 3i$ denn

$$|4+3i-z_0| = |4+3i-4+3i| = 6 < |5i-z_0| = |5i-4+3i)| = \sqrt{8^2+4^2}.$$

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{(z-(4+3i))(z-(4-3i))} = \frac{1}{z-(4-3i)} \cdot \frac{1}{z-4-3i} \\
&= \frac{1}{z-(4-3i)} \cdot \left(\frac{1}{z-(4-3i)+4-3i-4-3i} \right) \\
&= \frac{1}{z-(4-3i)} \cdot \left(\frac{1}{z-(4-3i)-6i} \right) \\
&= \frac{1}{(z-(4-3i))^2} \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{6i}{z-(4-3i)}} \right) = \frac{1}{(z-(4-3i))^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{6i}{z-(4-3i)} \right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (6i)^k \, (z-(4-3i))^{-k-2} = \sum_{k=-\infty}^{-2} (6i)^{-k-2} \, (z-(4-3i))^k .
\end{aligned}$$

b) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 2iz + 3}$, $z_0 = 0$, $z^* = 2i$.

Nennernullstellen: $(z-i)^2 + 4 = 0 \iff z_{1,2} = i \pm 2i$.

Es gilt $f(z) = \dfrac{1}{(z+i)(z-3i)}$.

$$Res(f; -i) = \left.\frac{1}{z-3i}\right|_{z=-i} = \tfrac{i}{4}$$

$$Res(f; 3i) = \left.\frac{1}{z+i}\right|_{z=3i} = -\tfrac{i}{4}$$

Wegen $|2i - z_0| = |2i - 0| = 2$ suchen wir die Laurent-Reihe für $1 < |z - z_0| < 3$ mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$. In diesem Ring gilt

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{z} \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{i}{z}} \right) = \frac{1}{z} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{-i}{z}} \right) = \frac{1}{z} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{z^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{z^{k+1}} = \sum_{k=-\infty}^{-1} (-i)^{-k-1} \, z^k .$$

sowie

$$\frac{1}{z-3i} = \frac{1}{-3i} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{z}{3i}} \right) = \frac{-1}{3i} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(3i)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-z^k}{(3i)^{k+1}} .$$

und damit

$$f(z) = \frac{i}{4} \cdot \sum_{k=-\infty}^{-1} (-i)^{-k-1} \, z^k \; - \; \frac{i}{4} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} - \frac{z^k}{(3i)^{k+1}}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{-1} - \frac{(-i)^{-k}}{4} \, z^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{4 \cdot 3^{k+1} i^k} = \sum_{k=-\infty}^{-1} - \frac{i^k}{4} \, z^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k z^k}{4 \cdot 3^{k+1}} .$$