Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2019**
Prof. Dr. T. Reis, Dr. P. Kiani

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 6: Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale und skizzieren Sie die zugehörigen Kurven.

a) $\displaystyle\int_{C_1+C_2} |z|\,dz := \int_{C_1} |z|\,dz + \int_{C_2} |z|\,dz,$ C_1 : geradliniger Weg von -1 nach 1, C_2 : Halbkreis mit Radius 1 um Null, von 1 nach -1 in mathematisch positiver Richtung durchlaufen.

b) $\displaystyle\int_C (1+z)\,dz,$ $C(t) := \cos t + 3i\sin t,\ t \in [-\pi, 0]$ (Halbellipse)

c) $\displaystyle\int_c (\bar{z})^2\,dz,$ $c(t) = 2e^{(-1+i)t},\ t \in [0,\ \pi/4],$

d) $\displaystyle\int_C e^{3z}\,dz,$ C : Das Stück der Parabel $\mathrm{Im}\,(z) = \pi\,(\mathrm{Re}\,(z))^2$ welches die Punkte Null und $1 + i\pi$ verbindet.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1:

a) $\displaystyle\int_{C_1+C_2} |z|\,dz \qquad C_1 : t \mapsto t,\ t \in [-1,1], \quad C_2 : t \mapsto e^{it},\ t \in [0,\pi]$

$$\int_{C_1} |z|\,dz + \int_{C_2} |z|\,dz = \int_{-1}^{1} |t|dt + \int_0^{\pi} |e^{it}|ie^{it}dt$$

$$= \int_{-1}^{0} -tdt + \int_0^1 tdt + \left[e^{it}\right]_0^{\pi} = \left[t^2\right]_0^1 - 2 = -1$$

b) $\displaystyle\int_C (1+z)\,dz = \int_{C(-\pi)}^{C(0)} (1+z)\,dz = \left[z + \frac{z^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 2$

Natürlich kann man auch $f(c(t))\dot{c}(t)$ einsetzen. Das ist allerdings etwas aufwendiger.

c) $c(t) = 2e^{(-1+i)t}, \quad \dot{c}(t) = 2(-1+i)e^{(-1+i)t}$

$$\int_c (\bar{z})^2 \, dz, = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2e^{(-1-i)t})^2 \cdot 2(-1+i)e^{(-1+i)t} \, dt = 8(-1+i) \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{(-3-i)t} \, dt$$

$$= 8\frac{-1+i}{-3-i} \left(e^{(-3-i)\frac{\pi}{4}} - e^0\right) = 8\frac{(-1+i)(-3+i)}{(-3-i)(-3+i)} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}(1-i) - 1\right)$$

$$= \frac{4}{5}(2-4i) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}(1-i) - 1\right)$$

d) Die Funktion ist analytisch in $\mathbb{C}$. Der Wert des Integrals hängt nur von Anfangs– und Endpunkt der Kurve ab.

$$\int_C e^{3z} \, dz = \left[\frac{e^{3z}}{3}\right]_0^{1+i\pi} = \frac{1}{3}(-e^3 - 1) \, .$$

Aufgabe 2: Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale sofern diese definiert sind. Die angegebenen Kurven sollen einmal in mathematisch positiver Richtung durchlaufen werden.

a) $\displaystyle\int_{C_k} \frac{4e^{\pi z}}{(z-2i)}\,dz \qquad k=1,2,3\,, \quad C_k\,:\,|z|=k\,,$

b) $\displaystyle\int_{C_k} \frac{e^{z}}{(z-2i)^5}\,dz \qquad k=1,2\,, \quad C_1\,:\,|z-1|=2, \quad C_2:|z-i|=2\,,$

c) $\displaystyle\int_{C} \frac{\cos^2(z)}{(z-\frac{\pi}{4})^4}\,dz \qquad C\,:\,|z-1|=1\,,$

d) $\displaystyle\int_{C_k} \frac{e^{\pi z}}{z^3-iz^2}\,dz \qquad k=1,2,\ C_1\,:\,|z|=\frac{1}{2},\ C_2\,:\,|z|=2\,,$

Lösungshinweise zur Aufgabe 2:

a) $\displaystyle\int_{C_k} \frac{4e^{\pi z}}{(z-2i)}\,dz \qquad k=1,2,3\,, \quad C_k\,:\,|z|=k\,,$

Nach dem Cauchyschen Integralsatz ist $\displaystyle\int_{C_1} \frac{4e^{\pi z}}{(z-2i)}\,dz \;=\; 0.$

$\displaystyle\int_{C_2} \frac{4e^{\pi z}}{(z-2i)}\,dz$ ist nicht definiert, da der Integrand für $z=2i$ nicht definiert ist.

Mit der Cauchyschen Integralformel erhält man

$$\int_{C_3} \frac{4e^{\pi z}}{(z-2i)}\,dz \;=\; 2\pi i\,\left[4e^{\pi z}\right]_{z=2i} = 8\pi i$$

b) Nach dem Cauchyschen Integralsatz ist

$$\int_{C_1} \frac{e^{z}}{(z-2i)^5}\,dz \;=\; 0.$$

Nach der Cauchyschen Integralformel ist

$$\int_{C_2} \frac{e^{z}}{(z-2i)^5}\,dz \;=\; \frac{2\pi i}{4!}\left[\left(e^z\right)''''\right]_{z=2i} \;=\; \frac{\pi i}{12}\,e^{2i} \;=\; \frac{\pi}{12}\left(-\sin(2)+i\cos(2)\right).$$

c) Nach der Cauchyschen Integralformel ist

$$\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\cos^2(z)}{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^4}\,dz = \frac{2\pi i}{3!}\left[\left(\cos^2(z)\right)'''\right]_{z=\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi i}{3}\left[-2\left(\cos(z)\sin(z)\right)''\right]_{z=\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\frac{\pi i}{3}\left[2\cos(2z)'\right]_{z=\frac{\pi}{4}} = \frac{4\pi i}{3}\left[\sin(2z)\right]_{z=\frac{\pi}{4}} = \frac{4\pi i}{3}$$

d)

$$\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^{\pi z}}{z^3-iz^2}\,dz = \int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{e^{\pi z}}{z-i}}{z^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1!}\left[\left(\frac{e^{\pi z}}{z-i}\right)'\right]_{z=0}.$$

$$= 2\pi i\left[\frac{\pi e^{\pi z}(z-i)-e^{\pi z}}{(z-i)^2}\right]_{z=0} = 2\pi i\left(\frac{\pi(-i)-1}{(-i)^2}\right) = 2\pi i - 2\pi^2\,.$$

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{e^{\pi z}}{z^3-iz^2}\,dz = \int\limits_{|z|=2} \frac{e^{\pi z}}{z^2(z-i)}\,dz\,.$$

Wir machen zunächst eine PBZ $\quad \dfrac{1}{z^2(z-i)} = \dfrac{az+b}{z^2} + \dfrac{c}{z-i}$

Mit dem Ergebnis $a=-c=1,\ b=i$. Es ist also

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{e^{\pi z}}{z^3-iz^2}\,dz = \int\limits_{|z|=2} e^{\pi z}\left(\frac{z+i}{z^2}-\frac{1}{z-i}\right)dz$$

$$= \int\limits_{|z|=2} \frac{e^{\pi z}\,(z+i)}{z^2}dz - \int\limits_{|z|=2} \frac{e^{\pi z}}{z-i}\,dz$$

$$= 2\pi i\,\left(e^{\pi z}(z+i)\right)'\big|_{z=0} - 2\pi i e^{\pi z}\big|_{z=i}$$

$$= 2\pi i\,\left(e^{\pi z}(\pi(z+i)+1)\right)\Big|_{z=0} - 2\pi i e^{i\pi} = 4\pi i - 2\pi^2$$