Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2019**
Prof. Dr. T. Reis, Dr. P. Kiani

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 6: Hausaufgaben

Aufgabe 1:

a) Sei γ der mathematisch positiv orientierte Rand (d.h. die Randkurve wird so durchlaufen, dass das Gebiet links liegt) des Gebietes $R := \{z \in \mathbb{C} \,:\, 1 < |z| < 3\}$.

Berechnen Sie : i) $\displaystyle\int_\gamma \mathrm{Im}\,(z)dz\,,$ ii) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2}{z+4i}dz\,,$ und iii) $\displaystyle\int_\gamma \frac{6z-6}{2z^2-5z+2}dz\,,$

b) Bitte bewerten Sie folgende Aussagen /wahr oder falsch).

(i) Seien $C(t) = 4e^{-it}, \quad t \in [-2\pi, 2\pi]$ und $\tilde{C}$ der einmal positiv durchlaufene Kreis mit Radius 2 um Null. . Dann gilt

☐ $\displaystyle\int_C \frac{3}{z-1}\,dz \;=\; 6\pi i\,.$

☐ $\displaystyle\int_C (z-1)^2 + \frac{3}{z-1}\,dz \;=\; -12\pi i\,.$

☐ $\displaystyle\int_C \frac{3}{z-1}\,dz = -2\int_{\tilde{C}} \frac{3}{z-1}\,dz\;.$

(ii) Sei $f(z) = \log(z)$. Dann gilt

☐ $\displaystyle\int_{C_1} f(z)\,dz \;=\; -2i$ für $C_1(t) = e^{it},\, t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\,.$

☐ $\displaystyle\int_{C_2} f(z)\,dz \;=\; -2i$ für $C_2(t) = 4 - 4t^2 + it,\, t \in [-1, 1]\,.$

Lösungshinweise zu Aufgabe 1:

a) Der Rand des Ringes kann wie folgt parametrisiert werden:

$$C_3(t) = 3e^{it} \quad 0 \le t \le 2\pi, \qquad \dot{C}_3(t) = 3ie^{it}, \qquad \mathrm{Im}\,(C_3(t)) = 3\sin(t) = \frac{3}{2i}(e^{it} - e^{-it}),$$

$$C_1(t) = e^{-it} \quad 0 \le t \le 2\pi, \qquad \dot{C}_1(t) = -ie^{-it}, \quad \mathrm{Im}\,(C_1(t)) = -\sin(t) = -\frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}).$$

Damit erhält man

i)
$$\begin{aligned}
\int_\gamma \operatorname{Im}(z)\,dz &= \int_{C_3} \operatorname{Im}(z)\,dz + \int_{C_1} \operatorname{Im}(z)\,dz \\
&= \int_0^{2\pi} 3ie^{it}\,\frac{3}{2i}(e^{it}-e^{-it}) - ie^{-it}\,\frac{-1}{2i}(e^{it}-e^{-it})dt \\
&= \frac{9}{2}\int_0^{2\pi}(e^{2it}-1)dt + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-e^{-2it})dt \\
&= \frac{9}{2}(0-2\pi) + \frac{1}{2}(2\pi-0) = -8\pi\,.
\end{aligned}$$

ii) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2}{z+4i}\,dz = 0 \qquad \text{(CIS)}.$

iii) Partialbruchzerlegung liefert

$$\frac{6z-6}{2z^2-5z+2} = \frac{3z-3}{(z-2)(z-\frac{1}{2})} = \frac{2}{z-2} + \frac{1}{z-\frac{1}{2}}$$

$$\int_{C_1}\frac{2}{z-2}\,dz = 0 \qquad \text{(CIS)}, \qquad \int_{C_3}\frac{2}{z-2}\,dz = 4\pi i \qquad \text{(CIF)},$$

$$\int_\gamma \frac{1}{z-\frac{1}{2}}\,dz = 0 \qquad \text{(Verallg. CIS)}.$$

$$\int_\gamma \frac{2}{z-2} + \frac{1}{z-\frac{1}{2}}\,dz = 4\pi i + 0\,.$$

b) (i) Seien $C(t) = 4e^{-it}$, $t \in [-2\pi, 2\pi]$ und $\tilde{C}$ der einmal positiv durchlaufene Kreis mit Radius 2 um Null. . Dann gilt

$\boxed{\text{f}}$ $\displaystyle\int_C \frac{3}{z-1}\,dz = 6\pi i.$ (CIF, 2 Mal negativer Umlauf)

$\boxed{\text{w}}$ $\displaystyle\int_C (z-1)^2 + \frac{3}{z-1}\,dz = -12\pi i.$ (CIS, CIF und Faktor 3)

$\boxed{\text{w}}$ $\displaystyle\int_C \frac{3}{z-1}\,dz = -2\int_{\tilde{C}} \frac{3}{z-1}\,dz.$ (CIF, Umlaufzahlen beachten)

(ii) Sei $f(z) = \log(z)$. Dann gilt

$\boxed{\text{w}}$ $\displaystyle\int_{C_1} f(z)\,dz = -2i$ für $C_1(t) = e^{it},\ t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$\boxed{\text{w}}$ $\displaystyle\int_{C_2} f(z)\,dz = -2i$ für $C_2(t) = 4 - 4t^2 + it,\ t \in [-1, 1]$.

Im ersten Teil Integral über $f(C_1(t)) \cdot \dot{C}_1(t) = it \cdot ie^{it}$ berechnen, oder Stammfunktion $F(z) = \frac{1}{z}$ verwenden.

Zweites Integral: Anfangs- und Endpunkt von C_1 und C_2 sind gleich. log ist in einer offenen einfach zusammenhängenden Menge um die Kurven analytisch. Die beiden Integrale haben den gleichen Wert.

Aufgabe 2:

a) Gegeben seien die Funktionen

$$f_1(z) := \frac{e^z - 1}{e^z + e^{-z}}\,, \qquad f_2(z) := \frac{1}{\log(3-z)}\,, \qquad f_3(z) := \frac{1}{\log(\frac{i}{2} - 4 - z)}.$$

Bestimmen Sie für $k = 1, 2, 3$ (ohne die jeweilige Reihe zu berechnen) den Radius des größten Kreises um Null, in dem die jeweilige Taylor Reihen T_k von f_k mit Entwicklungspunkt Null gegen f_k konvergiert.

b) Sei C eine einfach geschlossene stückweise C^1 Kurve. Wann ist das Integral

$$I(C) := \int\limits_C \frac{z}{z^2+1}\, dz$$

definiert?

Welche Werte kann das Integral annehmen, wenn es definiert ist?

c) Die Funktion $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2 - 4z + 13)}$ soll in eine Taylor Reihe mit Entwicklungspunkt $z_0 := x_0 + iy_0$, $x_0 \in \mathbb{R}^+$, $y_0 \in \mathbb{R}$ entwickelt werden, die mindestens in der Kreisscheibe $|z - z_0| < |z_0|$ gegen $f(z)$ konvergiert. Wie muss der Entwicklungspunkt gewählt werden, damit x_0 möglichst groß wird.

Lösungsskizze zur Aufgabe 2:

a) f_1 : der Nenner wird Null für
$e^{2z} = e^{2x} \cdot e^{2yi} = -1 = e^{i\pi} \iff x = 0\,, \quad y = k\pi + \frac{\pi}{2}$
Die Reihe konvergiert im Kreis mit Radius $r_1 = \dfrac{\pi}{2}$ gegen f.

Die Taylorreihen für f_2 bzw. f_3 konvergieren dort, wo $\log$ definiert ist, und der Nenner nicht verschwindet. Also ist $r_2 = 2$ und $r_3 = \frac{1}{2}$.

b) Das Integral existiert, sofern die Kurve weder durch i noch durch $-i$ geht. Die Kurve ist einfach geschlossen, also können die Umlaufzahlen von i und $-i$ nur die Werte $(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)$ bei positiver Orientierung bzw. $(0,0), (-1,0), (0,-1), (-1,-1)$ bei negativer Orientierung der Kurve annehmen.

(i)

$$Uml(C,i) = Uml(C,-i) = 0 \Longrightarrow I(C) = 0$$

(ii)

$$Uml(C,i) = 0\,, Uml(C,-i) = 1 \Longrightarrow I(C) = \int\limits_C \frac{\frac{z}{z-i}}{z+i}\, dz = 2\pi i \frac{-i}{-2i} = \pi i$$

(iii)

$$Uml(C,i) \; = 1\,,\, Uml(C,-i) \; = \; 0 \implies I(C) = \int\limits_C \frac{\frac{z}{z+i}}{z-i}\, dz = 2\pi i \frac{i}{2i} = \pi i$$

(iv)

$$Uml(C,i) \; = 1\,,\, Uml(C,-i) \; = \; 1 \implies I(C) = \frac{1}{2}\int\limits_C \frac{1}{z+i}\, dz \; + \; \frac{1}{2}\int\limits_C \frac{1}{z-i}\, dz$$

$$= \frac{1}{2} 2\pi i + \frac{1}{2} 2\pi i = 2\pi i$$

Bei negativem Umlauf erhält man entsprechend die Werte $0\,,\ -\pi i,\ -2\pi i\,.$

c) Der Nenner hat die Nullstellen $z_1 = 0,\ z_{2,3} = 2 \pm 3i$. Der Entwicklungspunkt muss so gewählt werden, dass alle drei Nullstellen auf einem Kreis um z_0 liegen. Wegen der Symmetrie von $z_2,\ z_3$ liegt z_0 auf der reellen Achse. Es muss gelten
$x_0^2 = (x_0-2)^2 + 9 \iff x_0 = \dfrac{13}{4} = z_0\,.$