Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2019**
Prof. Dr. T. Reis, Dr. P. Kiani

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 5: Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Zur Lösung zweier Potentialprobleme sollen folgende Transformationen durchgeführt werden:

a) Das Äußere der Ellipsenscheibe

$$E := \left\{ z = x + iy \in \mathbb{C} : \frac{16x^2}{25} + \frac{16y^2}{9} \le 1 \right\},$$

also $\mathbb{C} \setminus E$, soll auf das Äußere des Einheitskreises $K_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$ abgebildet werden.

b) Das Gebiet zwischen den durch $z = x + iy$ mit

$$\frac{4x^2}{3} - 4y^2 = 1 \iff \frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

definierten Hyperbelzweigen soll auf einen Sektor der Form

$$S := \{z \in \mathbb{C} : \phi_1 < \arg(z) < \phi_2\}$$

abgebildet werden.

Geben Sie geeignete Transformationen an.

Tipp: Umkehrung der Joukowski-Funktion.

Lösung:

a) Die Halbachsenlängen $a = \frac{5}{4}$ und $b = \frac{3}{4}$ erfüllen $a^2 - b^2 = 1$. Die Umkehrung der Joukowski Funktion macht also aus der Ellipse, einen Kreis. Den Radius des Kreises erhält man z.B. durch Einsetzen eines Punktes aus dem Rand der Ellipse. Bei richtiger Wahl der Wurzel liefert

$$\tilde{f}(z) := z + \sqrt{z^2 - 1}$$

$$\tilde{f}\left(\pm \frac{5}{4}\right) = \pm 2, \qquad f_1\left(\frac{3i}{4}\right) = 2i\,.$$

Man erhält also einen Kreis mit Radius 2 um Null. Um den Einheitskreis zu erhalten, wählen wir

$$f(z) := \frac{1}{2}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

Wegen $f(0) = -i/2$ geht das Innere der Ellipse in das Innere des Einheitskreises über.

b) Es sei $J : \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\} \to \mathbb{C}$ die Jukowski Funktion auf der Oberen komplexen Halbebene. Dann bildet $J^{-1}(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$ die Hyperbelzweige auf Strahlen mit

$$\cos(\phi_{1,2}) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin(\phi_{1,2}) = \frac{1}{2}$$

Als Bilder der Hyperbeläste erhalten wir also die Strahlen $re^{i\frac{\pi}{6}}$ und $re^{i\frac{5\pi}{6}}$. Wegen $J^{-1}(0) = i$ wird das Gebiet zwischen den Hyperbelästen auf den Sektor

$$S_1 = \left\{z \in \mathbb{C} :\ z = re^{i\phi},\ \frac{\pi}{6} < \phi < \frac{5\pi}{6}\right\}$$

abgebildet.

Aufgabe 2: Gegeben sei eine ebene Strömung mit der Geschwindigkeit $V \in \mathbb{R}^+$ im Unendlichen um das elliptische Profil

$$\frac{16x^2}{25} + \frac{16y^2}{9} \leq 1\,.$$

Bestimmen Sie ein Potential der Strömung und die Geschwindigkeit in den Punkten $\left(\pm\frac{5}{4}, 0\right)$ und $\left(0, \pm\frac{3}{4}\right)$.

Hinweise : Es genügt das Potential in Abhängigkeit von z anzugeben. Als Modellproblem kann die Umströmung eines Kreisprofils verwendet werden.

Lösung: Mit der Funktion f aus 1a) wird das Äußere der Ellipse auf das Äußere des Einheitskreises abgebildet. Es gilt

$$f(\infty) = \infty \qquad \text{und} \qquad f'(z) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2-1}}\right)$$

also

$$\lim_{z\to\infty} f(z) \;=\; \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{re^{i\phi}}{\sqrt{r^2 e^{2i\phi} - 1}}\right) \;=\; \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{e^{2i\phi} - 1/r^2}}\right) \;=\; 1$$

wegen $\text{grad } \Phi = \text{grad } \Psi \cdot \overline{f'(z)}$ hat die Strömung in der Modellebene ebenfalls im Unendlichen die Geschwindigkeit V.

Das Äußere des Einheitskreises kann mit Hilfe der Abbildung

$$\hat{f}(z) := z + \frac{1}{z}$$

auf die längs [-2,2] aufgeschlitzte komplexe Zahlenebene transformiert werden. Diese Abbildung erfüllt ebenfalls

$$\hat{f}(\infty) = \infty \qquad \text{und} \qquad \hat{f}'(\infty) = 1$$

die Strömung hat also immer noch im Unendlichen die Geschwindigkeit V. Hier läuft sie allerdings ungehindert. Insgesamt bilden wir unser ursprügliches Problem mit Hilfe der Funktion

$$\tilde{f}(z) := \hat{f}(f(z)) = \frac{1}{2}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right) + \frac{2}{z + \sqrt{z^2-1}}$$

auf die Modellebene ab und erhalten wegen $\Psi(w) = -V\,\text{Re}\,(w)$

$$\Phi(z) = \Psi(\tilde{f}(z)) = -V\,\text{Re}\,(\tilde{f}(z)) = \cdots$$

und

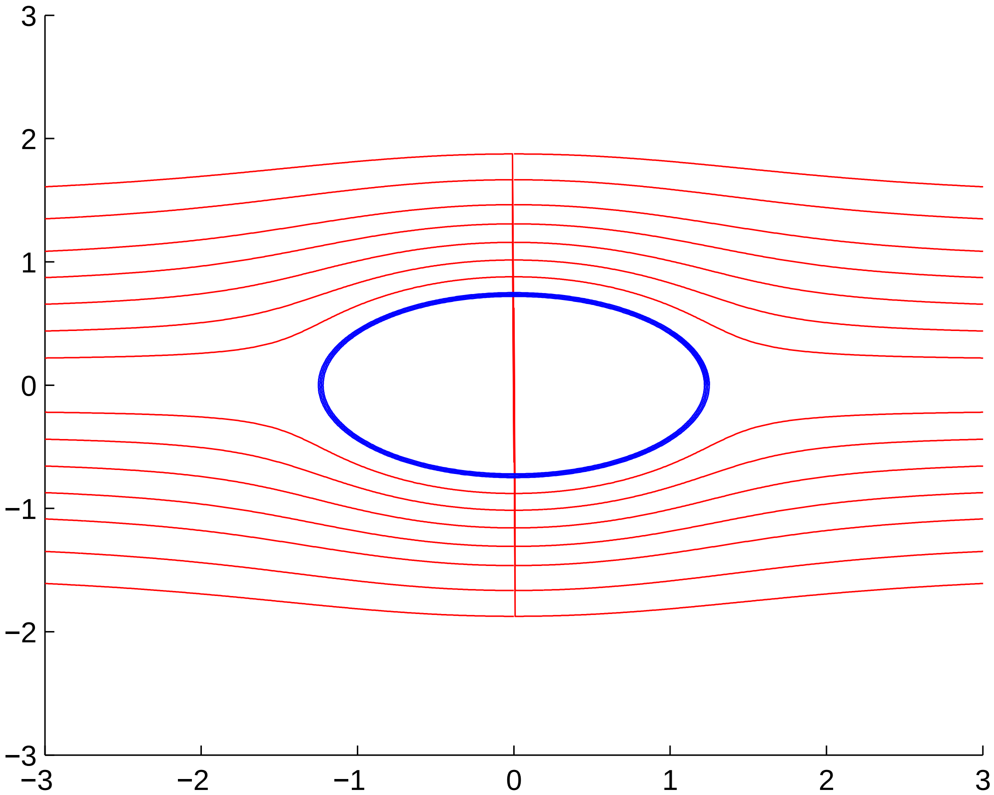
$$\begin{aligned}
\text{grad } \Phi(z) &= \text{grad } \Psi(\tilde{f}(z))\overline{f'(z)} = V\overline{\tilde{f}'(z)} \\
&= V\overline{\left(\frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2-1}}\right) - \frac{2}{\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)^2}\left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2-1}}\right)\right)} \\
&= V\overline{\left(\left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2-1}}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)^2}\right)\right)}
\end{aligned}$$

$$\text{grad } \Phi\left(\pm\frac{5}{4}\right) = 0 \qquad \text{grad } \Phi\left(\pm\frac{3i}{4}\right) = V(1 + \frac{3}{5}).$$

Mit Hilfe der Umkehrabbildung

$$z = \tilde{f}^{-1}(w) = \left(\frac{1}{2}w + \sqrt{\frac{w^2}{4} - 1}\right) + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}w + \sqrt{\frac{w^2}{4} - 1}\right)}$$

erhält man folgendes Stromlinienbild.



Umströmung eines elliptischen Profils

Abgabe bis: 07.06.19