Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2019**
Prof. Dr. T. Reis, Dr. P. Kiani

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 4: Hausaufgaben

Aufgabe 1:

a) f sei eine auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbare Funktion mit $f(0) = 0$ und

$$f(z) = f(x + iy) = e^x (x \cos(y) - y \sin(y)) + i \cdot v(x, y), \qquad \text{mit } v(x, y) \in \mathbb{R}.$$

Wie muss dann $v(x, y)$ aussehen? Zusatzaufgabe: Können Sie die errechnete Funktion f auch nur mit Hilfe von z, also ohne explizite Verwendung von x bzw. y ausdrücken?

b) Es sei $f(z) = \log(z)$ für $z = re^{i\phi} \in \mathbb{C}$, mit $-\pi < \phi < \pi$.
Die Kurven $\Gamma_{1,2}$

$$\Gamma_1 = te^{i\frac{\pi}{4}},\, t \in \mathbb{R}^+, \qquad \Gamma_2 = 2e^{it}, t \in (0, \pi)$$

gehen beide durch den Punkt $z^* = \sqrt{2}(1 + i)$. Um welchen Winkel werden die (Tangenten an die beiden) Kurven im Punkt z^* durch f gedreht?

Lösung:

a) Ist f auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar mit

$$f(z) = f(x + iy) = e^x (x \cos(y) - y \sin(y)) + i \cdot v(x, y), \qquad \text{mit } v(x, y) \in \mathbb{R}$$

so liefert die erste Cauchy-Riemannschen Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
v_y = u_x = {} & e^x (x \cos(y) - y \sin(y) + \cos(y)) \implies \\
v(x, y) = {} & e^x \left(x\ sin(y) - \int y \sin(y) dy + \sin(y) \right) \qquad \text{(partielle Integration liefert)} \\
= {} & e^x \left(x\ sin(y) + y \cos(y) - \int \cos(y) dy + \sin(y) \right) \\
= {} & e^x (x\ sin(y) + y \cos(y) - \sin(y) + \sin(y)) = e^x (x\ sin(y) + y \cos(y)) + K(x).
\end{aligned}$$

Mit diesem v muss gelten

$$-v_x = -e^x (x\ sin(y) + y \cos(y) + \sin(y)) - K'(x) \stackrel{!}{=} u_y = e^x (-x \sin(y) - \sin(y) - y \cos(y)) \quad .$$

also $\qquad K'(x) = 0$ und $K(x) = k,\ k \in \mathbb{R}$

und damit $\qquad v(x,y) = e^x\,(x\ sin(y) + y\cos(y)) + k\,.$

Die Bedingung $f(0=0$ lautet dann

$$f(0) = \ e^0\,(0\cdot\cos(0) - 0\cdot\sin(0))\ +\ i\cdot e^0\,(0\cdot\ \ sin(0) + 0\cdot\cos(0)) + k = 0$$

und damit $k = 0\,.$

Zusatzaufgabe: Umsortierung ergibt

$$\begin{aligned} f(z) &= xe^x(\cos(y) + i\ sin(y))\ +\ ye^x(i\cos(y) -\ sin(y)) \\ &= xe^x e^{iy} + iye^x(\cos(y) + i\ sin(y))\ =\ (x+iy)e^x e^{iy}\ = ze^{x+iy}\ =\ ze^z\,. \end{aligned}$$

b) Γ_1 ist der Strahl mit dem Winkel $\frac{\pi}{4}$:

Wegen $\log(z) = \log(|z|) + i\arg(z)$, wird Γ_1 durch f auf die Gerade

$$f(\Gamma_1) = \left\{ w \in C : \operatorname{Im}(w) = \frac{\pi}{4} \right\} =: g_1$$

abgebildet. g_1 ist eine zu $\mathbb{R}$ parallele Gerade. Durchläuft man Γ_1 für $t = 0$ bis ∞, so durchlaufen die Funktionswerte g_1 von links nach rechts. Die Tangente an Γ_1 wird durch f also um $-\frac{\pi}{4}$ gedreht.

Da f in der aufgeschnittenen komplexen Zahlenebene holomorph ist, werden die Tangenten an allen Kurven die z^* durchlaufen, um den gleichen Winkel gedreht. Man muss für Γ_2 also nichts mehr rechnen!

Wenn man mit Γ_2 anfängt, so stellt man fest, dass $\Gamma_2 =$ die obere Hälfte des Kreises mit Radius 2 um Null ist.

Wegen $\log(z) = \log(|z|] + i\arg(z)$, wird Γ_2 durch f auf das Geradenstück

$$f(\Gamma_1) = \{w \in C : \operatorname{Re}(w) = \log(2), 0 < \operatorname{Im}(w) < \pi\} =: g_2$$

abgebildet. g_2 ist parallele zu $i\mathbb{R}$.

Wie man leicht durch eine Skizze oder durch Rechnung nachprüft, ist die Tangente an Γ_2 in z^* gegeben durch

$$t(z) = z^* + \alpha(1+i) =\ z^* + \rho e^{i\frac{3\pi}{4}}\,.$$

$t(z)$ wird durch f auf ein Geradenstück mit dem Winkel von $i\mathbb{R}$, also $\frac{2\pi}{4}$ gedreht.

Alternativ: Da f holomorph ist, werden durch f in z^* alle Richtungen um den Winkel $\arg f'(z^*) = \arg\left(\frac{1}{z^*}\right) = \arg\left(\dfrac{1}{2e^{i\frac{\pi}{4}}}\right) = -\frac{\pi}{4}$ gedreht.

Aufgabe 2:

a) In welchem Gebiet ist die Möbiustransformation $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ winkeltreu?

b) Ist es möglich das Gebiet

$$M_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1,\ \mathrm{Re}\,(z) > 0,\ \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$$

mittels einer Möbiustransformation auf das Innere eines echten Dreiecks abzubilden? Unter einem echten Dreieck verstehen wir ein Dreieck dessen Eckpunkte im Endlichen liegen.

c) Die Abbildungsvorschrift $f:\ z \to e^{\frac{i\pi}{4}}\bar{z}$ beschreibt eine Drehspiegelung. Offensichtlich verursacht diese keine Längenverzerrungen. Die Größe der Winkel wird ebenfalls erhalten. f ist als Transformation $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Wo ist f komplex differenzierbar? Wie verträgt sich Ihr Ergebnis mit dem Satz aus Seite 132 der Vorlesung?

d) Das Gebiet $G := \{z \in \mathbb{C} : z = re^{i\varphi}\,,\ -\frac{\pi}{8} < \varphi < \frac{\pi}{8}\,,\ 0 < r < 2\}$ soll bijektiv und konform auf das Innere des Einheitskreises transformiert werden. Warum tut es $z \mapsto \left(\dfrac{z}{2}\right)^8$ nicht?

Freiwillige Zusatzaufgabe: Geben Sie eine bijektive, konforme Abbildung an, die das Gewünschte leistet.

Lösung:

a) Die Möbius Transformation ist analytisch in $\mathbb{C}$ ohne $z = -\dfrac{d}{c}$. Mit Ausnahme dieses Punktes gilt überall $T'(z) \neq 0$. Damit ist die angegebene Möbius Transformation winkeltreu in allen Punkten mit Ausnahme von $z = -\dfrac{d}{c}$.

b) Möbius-Transformationen sind überall winkeltreu außer im Punkt $z = -\dfrac{d}{c}$. Da ein echtes Dreieck erzeugt werden soll, fällt keine „Ecke" des Urbildes mit $z = -\dfrac{d}{c}$ zusammen. In den beiden Ecken $1 + 0 \cdot i$ und $0 + i$ von M_1 schneiden sich die berandenden verallgemeinerten Kreise im Winkel $\pi/2$. Beide rechten Winkel können aber nicht in einem echten Dreieck reproduziert werden.

Alternativ: Der Rand des Gebietes besteht aus Teilen dreier verallgemeinerter Kreise, die keinen gemeinsamen Schnittpunkt haben. Damit kann keine Möbius-Transformation alle drei verallgemeinerten Kreise des Randes auf Geraden abbilden. Denn alle Bildgeraden würden sich im unendlich fernen Punkt schneiden!

c) Die Funktion $g:\ z \to \bar{z}$ ist nirgends in $\mathbb{C}$ differenzierbar, denn es ist

$$g(z) = x - iy \implies u_x = 1 \neq -1 = v_y.$$

Damit ist auch f nirgends komplex differenzierbar. Die Abbildung ist aber auch nicht winkeltreu, denn sie erhält zwar die Größe der Winkel aber nicht die Orientierung.

d) Mit $\left(\frac{z}{2}\right)^8$ erhält man nur die längs der negativen reellen Achse aufgeschnittene Kreisscheibe.

Lösungsskizze der Zusatzaufgabe:

1. Schritt: $f_1(z) = \hat{z} = z^4$. *Der angegebene Achtelkreis wird bijektiv und konform auf einen Halbkreis abgebildet. Der Rand wird nun durch 2 Verallgemeinerte Kreise definiert.*

2. Schritt: *Der Schnitt zweier Verallgemeinerter Kreise wird auf einen Sektor abgebildet, wenn die Schnittpunkte der Verallgemeinerten Kreise (hier:* $16i$ *und* $-16i$ *) auf* 0 *und* ∞ *abgebildet werden. Wir wählen* $\tilde{z} = f_2(\hat{z}) := \dfrac{16i + \hat{z}}{16i - \hat{z}}$. *Das Bild von* $i\mathbb{R}$ *ist* $\mathbb{R}$ *(Form der Koeffizienten!) und das Bild des Kreises ist eine Gerade, die in* $T(-16i) = 0$ *senkrecht auf* $\mathbb{R}$ *steht (winkeltreue). Also wird der Kreisrand auf die imaginäre Achse abgebildet. Die rechte Hälfte der Kreisscheibe geht wegen* $T(0) = 1$ *und* $T(16) = -i$ *in den 4. Quadranten über.*

3. Schritt: $W = f_3(\tilde{z}) = \tilde{z}^2$. *Wir verdoppeln den Öffnungswinkel und haben damit den Rand auf einer Geraden, nämlich der reellen Achse .*

4. Schritt: *Im letzten Schritt bilden wir die reelle Achse auf den Einheitskreis und zwar, so dass z. B. der Punkt* $-i$ *in den Mittelpunkt 0 übergeht. Damit erreichen wir, dass die untere Halbebene in das Innere des Einheitskreises abgebildet wird. Die Transformation* $w = f_4(W) := \dfrac{W + i}{W - i}$ *leistet das Gewünschte.*

Insgesamt also

$$f(z) = \frac{\left(\dfrac{16i + z^4}{16i - z^4}\right)^2 + i}{\left(\dfrac{16i + z^4}{16i - z^4}\right) - i}.$$

Abgabe: 20.- 24.5.19