

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften Blatt 3 : Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

Hinweis : Sie brauchen keine konkrete Transformation anzugeben.

- a) Zur Lösung eines Potentialproblems soll das Gebiet außerhalb der beiden Kreisscheiben

$$K_1 := \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - 2| \leq \frac{3}{2} \right\}, \text{ und}$$

$$K_2 := \left\{ z \in \mathbb{C} : |z + 1| \leq \frac{3}{2} \right\}$$

auf ein Parallelstreifen oder auf das Innere eines Kreisringes um Null abgebildet werden. Welche der beiden Transformationen ist mit Hilfe einer Möbius-Transformation möglich?

- b) Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$ fest vorgegeben. Welche der folgenden Gebiete können mittels einer Möbiustransformation auf einen Sektor der Form

$$S := \left\{ w \in \mathbb{C} : w = r e^{i\phi}, r \in \mathbb{R}^+, -\pi < \varphi_1 < \phi < \varphi_2 < \pi \right\}$$

abgebildet werden? Bitte begründen Sie Ihre Antworten.

(i)

$$G_1 := \left\{ z \in \mathbb{C} : \alpha < |z| < \beta \right\}.$$

(ii)

$$G_2 := \left\{ z \in \mathbb{C} : \alpha < \operatorname{Re}(z) < \beta \right\}.$$

(iii)

$$G_3 := \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| < \frac{3}{4} |\beta - \alpha|, |z - \beta| < \frac{3}{4} |\beta - \alpha| \right\}.$$

Lösung zu Aufgabe 1)

- a) Das Urbild wird begrenzt durch die zwei Kreise

$$C_1 := \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - 2| = \frac{3}{2} \right\}, \text{ und}$$

$$C_2 := \left\{ z \in \mathbb{C} : |z + 1| = \frac{3}{2} \right\}.$$

Diese beiden Kreise haben einen Schnittpunkt in $z_s = \frac{1}{2}$. Bei der Abbildung auf einen Ring müssten die Kreise auf zwei schnittpunktfreie Kreise abgebildet werden. Das ist nicht möglich!

Bei der Abbildung auf einen Streifen müssen die Kreise auf zwei Geraden g_1 und g_2 abgebildet werden. Diese haben einen Schnittpunkt, nämlich den unendlich fernen

Punkt. Man bildet also den Schnittpunkt der beiden Kreise auf den unendlich fernen Punkt ab und erhält als Bilder der Kreise C_1 und C_2 zwei Geraden. Da die Kreise keine weiteren Schnittpunkte haben, haben auch die Bildgeraden keine weiteren Schnittpunkte. Sie sind also parallel.

Wählt man zum Beispiel reelle Koeffizienten, so werden die Mittelpunkte M_1 und M_2 von C_1 und C_2 auf reelle Zahlen abgebildet, g_1 und g_2 stehen senkrecht auf \mathbb{R} und der unendlich ferne Punkt wird auf $(T(M_1) + T(M_2))/2$ abgebildet. Das Gebiet außerhalb der beiden Kreisscheiben wird also auf den Parallelstreifen zwischen g_1 und g_2 abgebildet.

Eine Abbildung auf einen Streifen ist also möglich. Zum Beispiel $T(z) = \frac{1}{z - \frac{1}{2}}$.

- b) Ein Sektor S der angegebenen Form wird begrenzt durch zwei verallgemeinerte Kreise mit den zwei Schnittpunkten Null und ∞ .

- (i) Das Ringgebiet

$$G_1 := \{z \in \mathbb{C} : \alpha < |z| < \beta\}.$$

wird begrenzt durch zwei schnittfreie verallgemeinerte Kreise. Die Transformation von G_1 auf S mittels einer Möbiustransformation ist nicht möglich.

- (ii) Der Parallelstreifen

$$G_2 := \{z \in \mathbb{C} : \alpha < \operatorname{Re}(z) < \beta\}.$$

wird begrenzt durch zwei verallgemeinerte Kreise mit dem Schnittpunkt ∞ . Die Transformation von G_2 auf S mittels einer Möbiustransformation ist nicht möglich.

- (iii) Das Gebiet

$$G_3 := \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| < \frac{3}{4}|\beta - \alpha|, |z - \beta| < \frac{3}{4}|\beta - \alpha| \right\}.$$

wird begrenzt durch zwei verallgemeinerte Kreise mit zwei Schnittpunkten z_1 und z_2 . Bildet man mittels Möbiustransformation einen dieser Schnittpunkte auf Null ab, und den anderen auf ∞ so geht G_3 in einen Sektor über.

Aufgabe 2:

- a) Bestimmen Sie eine Möbiustransformation $T : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$, $T(z) := \frac{az + b}{cz + d}$ mit

$$T(i) = 0, \quad T(0) = 2, \quad T(2i) = \infty.$$

- b) Bestimmen Sie die Bilder der folgenden verallgemeinerten Kreise unter der Transformation T .

- (i) $K :=$ imaginäre Achse,
- (ii) $K_2 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$,
- (iii) $\tilde{K} :=$ reelle Achse.

- c) Bestimmen Sie das Bild der Viertelebene

$$S := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}.$$

- d) Bestimmen Sie das Bild von

$$H := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 3\}.$$

Lösungsskizze Aufgabe 2)

a) $T(i) = 0, T(2i) = \infty \iff T(z) = \frac{a(z-i)}{z-2i}.$

$$T(0) = 2, \implies T(z) = \frac{4(z-i)}{z-2i}.$$

- b) (i) Wegen der gegebenen Bilder von $0, i, 2i$ ist $T(i\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Alternative Lösung: $2i \in i\mathbb{R} \iff T(i\mathbb{R})$ ist eine Gerade.

$$T(0) = 2, T(\infty) = 4 \iff T(i\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

- (ii) $2i \in K_2 \iff T(K_2)$ ist eine Gerade.

K_2 symmetrisch zu $i\mathbb{R} \implies T(K_2)$ symmetrisch zu \mathbb{R} .

$T(-2i) = \frac{4(-3i)}{-4i} = 3 \iff T(K_2)$ ist die Parallele zur imaginären Achse durch den Punkt 3

$$g_2 := T(K_2) = \{w \in \mathbb{C} : w = 3 + iv, v \in \mathbb{R}\}.$$

- (iii) $2i \notin \mathbb{R} \iff T(\mathbb{R})$ ist ein echter Kreis K_R .

\mathbb{R} symmetrisch zu $i\mathbb{R}$ und $K_2 \implies T(\mathbb{R})$ ist symmetrisch zu \mathbb{R} und g_2 . Der Mittelpunkt des Bildkreises ist also $M = 3$.

Wegen $T(0) = 2$ ist der Radius $R = 1$.

- c) Das Bild der Viertelebene wird berandet durch \mathbb{R} und K_R .

Nun kann man zum Beispiel rechnen:

$$T(2i) = \infty \implies \text{obere Halbebene} \longrightarrow \text{Äußere von } K_R.$$

$$T(2) = \frac{8 - 4i}{2 - 2i} = \frac{2(2 - i)(1 + i)}{1 - i^2} = 2 + 2i - i + 1 = 3 + i.$$

Die rechte Halbebene wird also auf die obere Halbebene abgebildet.

$$T(S) = \{w \in \mathbb{C} : \text{Im}(w) > 0, |w - 3| > 1\}.$$

Oder zum Beispiel:

$$T(1 + 2i) = \frac{4 + 8i - 4i}{1 + 2i - 2i} = 4 + 4i$$

Liegt in der oberen Halbebene und Außerhalb von K_R , also

$$T(S) = \{w \in \mathbb{C} : \text{Im}(w) > 0, |w - 3| > 1\}.$$

- d) Das Bild der Geraden $\text{Re}(z) = 3$ ist ein echter Kreis, da $2i$ nicht auf der Geraden liegt. Der Mittelpunkt C und ∞ sind symmetrisch bezüglich des Bildkreises. Also ist

$$T^{-1}(\infty) = 2i \text{ bzgl. der Geraden } \text{Re}(z) = 3 \text{ symmetrisch zu } T^{-1}(C)$$

$$\implies T^{-1}(C) = 2i + 6 \iff C = T(2i + 6) = \frac{4(2i + 6 - i)}{2i + 6 - 2i} = 4 + \frac{2i}{3}$$

Wegen $T(\infty) = 4$ hat der Kreis den Radius $r = \frac{2}{3}$. Wegen $T(0) = 2$ wird $E : \text{Re}(z) > 3$ auf das Innere des Kreises abgebildet.

$$T(H) = \{w \in \mathbb{C} : |w - 4 - \frac{2i}{3}| < \frac{2}{3}\}.$$

Bearbeitungstermine: 6.5.19 - 10.5.19