Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 3: Hausaufgaben

Aufgabe 1:

a) Geben Sie eine Möbius-Transformation an, mit

$$T(0) = 2i,\ T(4) = 0,\ T(8) = \infty\,.$$

b) (i) Bestimmen Sie die Bilder folgender Geraden unter der Abbildung T aus a). Geben Sie dazu jeweils eine genaue Begründung an.

A) $g_1 = \{z \in \mathbb{C}^* \,:\, \mathrm{Im}\,(z) = 0\}\,.$

B) $g_2 = \{z \in \mathbb{C}^* \,:\, \mathrm{Im}\,(z) = 8 - \mathrm{Re}\,(z)\}\,.$

C) $g_3 = \{z \in \mathbb{C}^* \,:\, \mathrm{Re}\,(z) = \mathrm{Im}\,(z)\}\,.$

(ii) Auf welche Menge wird dann das Innere des Dreiecks mit den Ecken $0,\ 8,\ 4+4i$ abgebildet? Fertigen Sie Skizzen der Urbild- und Bildebene an!

Lösungsskizze zur Aufgabe 1)

a) $T(4) = 0,\ T(8) = \infty \implies T(z) = a \cdot \dfrac{z-4}{z-8}\,.$

$T(0) = \frac{a}{2} = 2i \implies T(z) = 4i \cdot \dfrac{z-4}{z-8}\,.$

b) (i) Verallgemeinerte Kreise durch 8 werden auf Geraden abgebildet.

A) Also ist das Bild der reellen Achse eine Gerade, wobei

$$T(0) = 2i, \quad T(4) = 0$$

gilt. Es ist also $T(\mathbb{R}) = i \cdot \mathbb{R}\,.$

B) Das Bild von $g_2 = \{z \in \mathbb{C}^* \,:\, \mathrm{Im}\,(z) = 8 - \mathrm{Re}\,(z)\}$ ist wegen $8 \in g_2$ ebenfalls eine Gerade. Es gilt $T(\infty) = 4i$ und zum Beispiel

$$T(8i) = 4i \cdot \frac{8i-4}{8i-8} = 2i \cdot \frac{2i-1}{i-1} = 2i \cdot \frac{(2i-1)(-i-1)}{-i^2+1^2} = 1+3i$$

oder zum Beispiel

$$T(4+4i) = 4i \cdot \frac{4i}{4i-4} = -4 \cdot \frac{-i-1}{-i^2+1^2} = 2+2i\,.$$

$T(g_2) = \{z \in \mathbb{C}^* \,:\, \mathrm{Im}\,(z) = 4 - \mathrm{Re}\,(z)\}\,.$

C) Das Bild von g_3 ist ein echter Kreis K da $8 \notin g_3\,.$
Der Bildkreis geht durch die Punkte
$T(4+4i) = 2+2i, T(0) = 2i, T(\infty) = 4i$

Der Mittelpunkt des Bildkreises liegt auf der Mittelsenkrechten auf die Verbindung von $2+2i$ und $2i$. Also ist $M = 1 + ib$.
Der Mittelpunkt liegt auf der Mittelsenkrechten auf die Verbindung von $4i$ und $2i$. Also ist $M = 1 + 3i$.
Für den Radius rechnet man zum Beispiel wegen $2i \in$ Bildkreis:
$R = \sqrt{(-0)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}.$

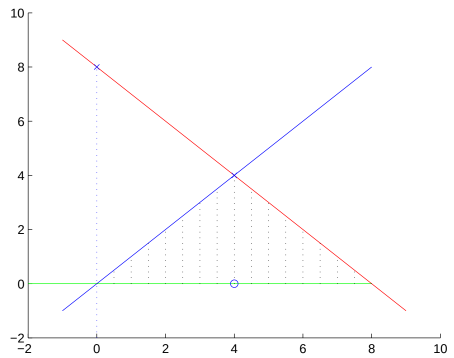
(ii) Das Dreieck wird begrenzt durch die Geraden g_1, g_2, g_3. Das Bild wird also durch die Bilder dieser Geraden begrenzt.

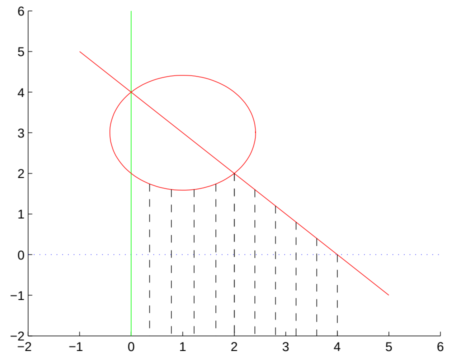
Wegen $T(4) = 0$ liegt das Bild außerhalb von K und unterhalb von $T(g_2)$. Wegen $T(4+4i) = 2+2i$ liegt das Bild rechts von $T(g_1)$.

Alternativ, rechnet man das Bild eines Punktes aus dem Inneren des Dreiecks aus. Zum Beispiel:

Wegen $T(4+i) = \frac{8}{5}(1+i)$.

So oder so erhält man als Bild, die Punkte $w = u + iv \in \mathbb{C}$ mit:
$u > 0,\ v < 4 - u,\ |w - (1+3i)| > \sqrt{2}$.



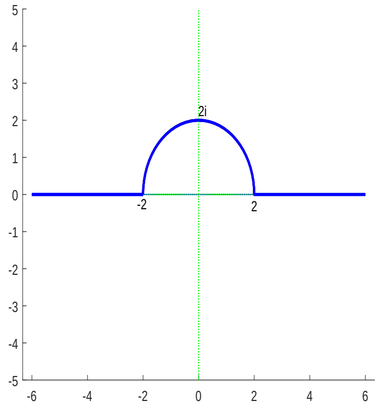


Aufgabe 2:

a) Zur Lösung eines Potentialproblems soll das Gebiet außerhalb der beiden Kreisscheiben
$\tilde{K}_1 := \left\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z - \frac{5}{2}| \,\leq\, \frac{3}{2}\right\}$, und
$\tilde{K}_2 := \left\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z + \frac{5}{2}| \,\leq\, \frac{3}{2}\right\}$
auf das Innere eines Kreisringes um Null abgebildet werden. Geben Sie eine geeignete Transformation an.

b) Es sei

$D := \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x \leq -2\} \cup \left\{z \in \mathbb{C} \,:\, z = 2e^{i\phi},\, \phi \in [0, \pi]\right\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x < \infty\}$.



Bestimmen Sie das Bild von D unter der Abbildung $f(z) = \dfrac{2}{z} + \dfrac{z}{2}$.

Lösung zur Aufgabe 2:

a) Man kann direkt die Folien 106-107 der Vorlesung nutzen, oder selbst wie folgt herleiten. Es seien K_1 und K_2 die Ränder von $\tilde{K}_1$ und $\tilde{K}_2$. Wir verwenden eine Möbius-Transformation, die diese beiden Kreise auf zwei konzentrische Bildkreise abgebildet.

Im Bild sind Null und der unendlich ferne Punkt symmetrisch zu beiden Bildkreisen. Sie müssen daher die Bilder derjenigen zwei Punkte p_1, p_2 sein, die im Urbild symmetrisch zu beiden Kreisen K_1 und K_2 sind. Die gesuchten Punkte p_1 und p_2 liegen auf der Verbindungstrcke der beiden Mittelpunkte von K_1 und K_2 also auf der reellen Achse.

Aufgrund der symmetrischen Lage der beiden Kreise zur imaginären Achse gilt $p_1 = -p_2 =: p$. Die Bedingung der Symmetrie bzgl. K_2 lautet nun:

$$(p - \frac{5}{2}) \cdot (-p - \frac{5}{2}) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow p^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 4\,.$$

Wir wählen $p_1 = -2$ und $p_2 = 2$.

Für $T(z) := \dfrac{z-2}{z+2}$ gilt

- Die reelle Achse wird auf die reelle Achse abgebildet.
- Die Kreise K_1 und K_2 werden auf echte Kreise abgebildet, die symmetrisch zum Bild der reellen Achse liegen. Die Mittelpunkte der Bildkreise liegen also auf $\mathbb{R} = T(\mathbb{R})$.
- Es gilt:
  $T(-4) := \dfrac{-4-2}{-4+2} = 3, \qquad T(-1) := \dfrac{-1-2}{-1+2} = -3$.
  Das Bild von K_1 ist der Kreis mit Radius 3 um 0.

  $T(4) := \dfrac{4-2}{4+2} = \frac{1}{3}, \qquad T(1) := \dfrac{1-2}{1+2} = -\frac{1}{3}$.
  Das Bild von K_2 ist der Kreis mit Radius $\frac{1}{3}$ um 0.
  Wegen $T(0) = -1$ wird das Gebiet zwischen den beiden Kreisscheiben auf das folgende Ringgebiet abgebildet:

$$R := \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, \frac{1}{3} < |z| < 3 \right\}.$$

b) (Vergleiche Folien 67 ff. der Vorlesung)

$D := \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x \leq -2\} \cup \big\{z \in \mathbb{C} : z = 2e^{i\phi},\, \phi \in [0, 2\pi]\big\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x < \infty\}$.

$f(z) = \frac{2}{z} + \frac{z}{2}$.
f ist in $\mathbb{C} \setminus 0$ differenzierbar mit $f'(z) = -\frac{2}{z^2} + \frac{1}{2}$.
Es gilt $f'(z) = 0 \iff z = \pm 2$.

f ist also monoton auf $]-\infty, -2]$ und $[2, \infty[$.

$\lim\limits_{z \to -\infty} f(z) = -\infty$ und $f(-2) = -2 \implies f(]-\infty, -2]) =]-\infty, -2]$

$\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = \infty$ und $f(2) = 2 \implies f([2, \infty[) = [2, \infty[$

$f(2e^{i\phi}) = \frac{2}{2e^{i\phi}} + \frac{2e^{i\phi}}{2} = e^{-i\phi} + e^{i\phi} = 2\cos(\phi)$

Für $\phi \in [0, \pi]$ durchläuft $f(2e^{i\phi})$ also das Intervall $[-2, 2]$.

Insgesamt also $f(D) = \mathbb{R}$.

Abgabe: 6.- 10.5.19