Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2019**
Prof. Dr. T. Reis, Dr. P. Kiani

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2 : Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

a) Gegeben seien die Rechtecke:

$R_1 := \{z \in \mathbb{C} : \ z = x + iy,\ x \in [0, \log(2)],\ y \in [\pi, 2\pi]\}$ und
$R_2 := \{z \in \mathbb{C} : \ z = x + iy,\ x \in [0, \log(2)],\ y \in [-2\pi, -\pi]\}$.

Bestimmen Sie die Bilder der beiden Rechtecke unter der Abbildung $f(z) = e^z$.

b) Überprüfen Sie die Gültigkeit der Gleichungen $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$ in $\mathbb{C}$.

Lösung zu Aufgabe 1:

a) Für das Bild von R_1 gilt:

$|e^z| = e^x \in \left[e^0, e^{\log 2}\right] = [1, 2]$.

Für die Argumente der Bildpunkte gilt

$\arg(f(z)) = \arg(e^x \cdot e^{iy}) = \arg(e^{iy}) = y \in [\pi, 2\pi]$.

Das Bild ist die untere Hälfte des Kreisringes um Null mit Innenradius 1 und Außenradius 2.

Für R_2 erhält man die gleichen Beträge der Bildpunkte aber die Argumente liegen in $[-2\pi, -\pi]$. Das Bild ist die obere Hälfte des Kreisringes um Null mit Innenradius 1 und Außenradius 2.

b)

$$\begin{aligned} \exp(x - iy) &= e^x \cdot e^{i(-y)} = e^x \cdot (\cos(-y) + i \sin(-y)) \\ &= e^x \cdot (\cos(y) - i \sin(y)) = e^x \cdot \overline{e^{iy}} = \overline{e^z} . \end{aligned}$$

Die Gleichungen kann auch völlig anders begründet werden. Zum Beispiel geometrisch:

Bei Berechnung von $\exp(x - iy)$ ergibt sich mit e^x der gleiche Betrag, wie bei der Berechnung von $\exp(x + iy)$. Der Cosinus des Arguments bleibt ebenfalls unverändert. Dagegen ändert sich das Vorzeichen vom Sinus des Arguments. Dies entspricht einer Spiegelung an der reellen Achse.

Aufgabe 2:

a) Geben Sie eine Funktionsvorschrift an, die den Keil
$\left\{ z \in \mathbb{C} : \; z = re^{i\phi}, \, r \in (0, \infty), \, -\dfrac{\pi}{2} \; < \; \phi \; < \; -\dfrac{\pi}{6} \right\}$
auf die obere Halbebene $\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \; > 0 \}$ abbildet.

b) Gegeben sei die Menge $\quad R = \{ z \in \; \mathbb{C} : \; \frac{1}{2} \; \leq \; |z| \; \leq \; \frac{e^1}{2}, \, \operatorname{Im}(z) > 0 \}$,
sowie die Abbildung

$$f(z) = \; e^{i \frac{\pi}{2}} \cdot \log \; (2 \, z \,) \, ,$$

wobei log den Hauptwert des komplexen Logarithmus bezeichne.

(i) Skizzieren Sie die Menge R in der komplexen Ebene.

(ii) Bestimmen Sie das Bild von R unter der Abbildung f .

Lösung zu Aufgabe 2:

a) Eine der vielen möglichen Transformationen ist $f(z) = e^{-i \frac{\pi}{2}} \cdot z^3$.
Eine andere wäre etwa

$$z \; \rightarrow \hat{z} := e^{i \frac{\pi}{3}} \cdot z \qquad \text{Bild: Keil symmetrisch zum Strahl } \phi = 0$$

$$\hat{z} \; \rightarrow \tilde{z} := (\hat{z})^3 \qquad \text{Bild: rechte Halbebene } x > 0$$

$$\tilde{z} \; \rightarrow w := e^{i \frac{\pi}{2}} \cdot \tilde{z} \qquad \text{Bild: obere Halbebene } y > 0 \, .$$

b) (i) Skizze: R ist die obere Hälfte des Ringes um Null mit Innenradius $\frac{1}{2}$ und Außenradius $\frac{e}{2}$.

(ii) $f(z) = \; e^{i \frac{\pi}{2}} \cdot \log \; (2 \, z \,)$.
Sei $\tilde{w} = 2z$ dann gilt $1 \leq |\tilde{w}| \; \leq e^1$ und $0 < \arg(\tilde{w}) < \pi$.
Für $\hat{w} = \log(\tilde{w}) = \; \log |\tilde{w}| + i \arg(\tilde{w})$ gilt dann
$\operatorname{Re}(\hat{w}) \; \in \; [\log(1), \log(e)] \; = \; [0, 1], \qquad \operatorname{Im}(\hat{w}) \; \in (0, \pi)$.
Schließlich berechnen wir
$f(z) = e^{i \frac{\pi}{2}} \cdot \hat{w}$ und erhalten ein achsenparalleles Rechteck mit
$\operatorname{Re}(f(z)) \; \in \; (-\pi, 0), \qquad \operatorname{Im}(f(z)) \; \in [0, 1]$.

Bearbeitungstermine: 23.- 26.04.19