Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2019**

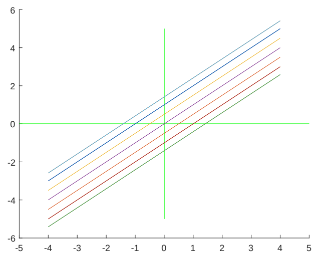
Prof. Dr. T. Reis, Dr. P. Kiani

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2 : Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Geben Sie eine Funktionsvorschrift an, die den Streifen
$S := \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Re}\,(z) - \sqrt{2} \,<\, \mathrm{Im}\,(z) \,<\, \mathrm{Re}\,(z) + \sqrt{2} \right\}$



auf den Kreisring
$R := \{ z \in \mathbb{C} \,:\, 1 \,<\, |z| \,<\, 2\}$ abbildet.
Die Funktion soll dabei nicht direkt auf den Real- oder den Imaginärteil von z sondern nur auf z selbst zugreifen.

Tipp: Transformieren Sie zunächst auf einen achsenparallelen Streifen $\tilde{S}$.

Lösung:

Der Streifen wird begrenzt durch zwei Geraden:

$g_1 : \mathrm{Im}\,(z) = \mathrm{Re}\,(z) - \sqrt{2}$

$g_2 : \mathrm{Im}\,(z) = \mathrm{Re}\,(z) + \sqrt{2}$

Wir können zur y-Achse parallele Streifen auf Ringe abbilden. Also drehen wir zunächst

Schritt 1 : Drehen um $\pi/4$

$f_1(z) = e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot z \,=\, \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)z\,.$

Die Punkte $P_1 = 0 - i\sqrt{2}$, $P_2 = \sqrt{2}$ liegen auf g_1 und werden auf $1 \pm i$ abgebildet. Daher gilt

$f_1(g_1) = g_3 = \{ z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Re}\,(z) = 1\}\,.$

Analog erhält man: $f_1(g_2) = g_4 = \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Re}\,(z) = -1\}$.

$f_1(S) = \{w = u + iv \,:\, -1 < u < 1,\, -\infty < v < \infty\} = \tilde{S}$

Wenn wir die Exponentialfunktion direkt auf den Bildstreifen anwenden, erhalten wir:

$\exp(f_1(z)) = \exp(u + iv) = e^u \cdot e^{iv}$

$\exp(\tilde{S})$: Kreisring mit Innenradius e^{-1} , Außenradius e^1

Ziel: Innenradius $1 = e^0$ und Außenradius $= 2 = e^{\log 2}$.

Schritt 2: Wir verschieben den Streifen

$f_2(z) := z + 1$

$f_2 \circ f_1(S) = \{w = u + iv \,:\, 0 < u < 2,\, -\infty < v < \infty\} = \hat{S}$

Schritt 3: Jetzt skalieren wir

$f_3(z) := \frac{\log(2)}{2} \cdot f_2 \circ f_1(z)$

$f_3(S) = \{w = u + iv \,:\, 0 < u < \log(2),\, -\infty < v < \infty\}$

Schritt 4: Streifen $\longrightarrow$ Ring

$f_4(z) := \exp(f_3(z)) = \exp(u + iv) = e^u \cdot e^{iv}$

$f_4(S)$: Kreisring mit Innenradius 1, Außenradius 2 um Null.

Bemerkung: Ein Vorschlag der Form $f(z) = e^{i\mathrm{Im}\,(f_1(z))} \cdot \frac{(3+\mathrm{Re}\,(f_1(z)))}{2}$ führt auch zum Ziel. Mit etwas mehr Übung neigt man aber eher dazu in Funktionsvorschriften $\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\,(z)$, $\bar{z}$ möglichst zu meiden. Meist sind die so erhaltenen Funktionen nicht differenzierbar.

Aufgabe 2: $\log(z)$ bezeichne den Hauptwert des komplexen Logarithmus.

a) Zeigen Sie, dass alle 19 (warum nicht 20?) Lösungen der Gleichung

$$(z-4)^{20} = z^{20}$$

auf der Geraden $\operatorname{Re}(z) = 2$ liegen.

b) Wie viele Lösungen hat die Gleichung $(z-1)^i = z^i$?

c) Zeigen Sie, dass für alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $\log(-z) \neq \log(z)$ gilt.

d) Was ist falsch an folgender Argumentation von Johann Bernoulli:

$$(-z)^2 = z^2 \Longleftrightarrow \operatorname{Log}((-z)^2) = \operatorname{Log}(z^2) \Longleftrightarrow$$

$$2\log(-z) = 2\log(z) \Longleftrightarrow \log(-z) = \log(z)\,?$$

Lösung:

a)

$$(z-4)^{20} = z^{20} \Longrightarrow |(z-4)^{20}| = |z^{20}| \Longrightarrow |z-4|^{20} = |z|^{20}$$

d.h. z hat den gleichen Abstand von 4 und 0. z liegt also auf der Mittelsenkrechten der Verbindung von 0 und 4. Da $p(z) := (z-4)^{20} - z^{20}$ ein Polynom 19-ten Grades ist, hat es 19 Nullstellen.

b) Lösungen von $(z-1)^i = z^i$:

Es sei $w := f(z) := z^i$. Dann gilt

$$w = z^i = \exp(\log(z))^i = \exp(\log(z)\cdot i) = \exp\big(i\cdot\log(|z|) + i^2\arg(z)\big)$$

Also

$$|w| = e^{-\arg(z)}, \qquad \arg(w) = \log(|z|) + 2k\pi \qquad \text{für geeignetes } k \in \mathbb{Z}.$$

Gilt nun $\tilde{w} := (z-1)^i = z^i = w$, so muss zunächst $|\tilde{w}| = |w|$ gelten. Also

$$e^{-\arg(z)} = e^{-\arg(z-1)} \Longrightarrow \arg(z) = \arg(z-1) \Longrightarrow z \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$$

Des weiteren müssen die Argumente bis auf $2k\pi$ übereinstimmen. Für $z \in]1,\infty[$ heißt das, dass ein $k \in \mathbb{N}$ existieren muss, so dass

$$\arg\tilde{w} := \log(z-1) + 2k\pi = \log(z) = \arg w \Longrightarrow \log\left(\frac{z-1}{z}\right) = -2k\pi \Longrightarrow 1 - \frac{1}{z} = e^{-2k\pi}$$

Es gibt also unendlich viele Lösungen, unter anderen

$$z_k = \frac{1}{1-e^{-2k\pi}} \qquad k \in \mathbb{N}$$

Für negative z erhält man analog die obigen Lösungen allerdings mit $k \in \mathbb{Z}^-$.

c)
$$\log(z) \;=\; \log(|z|) \;+\; i\arg(z) \;\neq\; \log(-z) \;=\; \log(|z|) \;+\; i\arg(-z)$$

denn es gibt keine komplexe Zahl mit $\arg(z) = \arg(-z)$.

d) Falsch an der Argumentation

$$(-z)^2 \;=\; z^2 \Longleftrightarrow \log((-z)^2) \;=\; \log(z^2)$$
$$2\log(-z) \;=\; 2\log(z) \Longleftrightarrow \log(-z) \;=\; \log(z)\,?$$

ist, dass für den Hauptwert der Logarithmusfunktion in $\mathbb{C}$

$$\log(z^2) = 2\log(z)$$

nur gilt, wenn für den Hauptwert des Arguments

$$|\arg(z)| \;<\; \frac{\pi}{2}$$

gilt. Es ist z.B.

$$\log(e^{i\frac{3\pi}{4}}) = i\,\frac{3\pi}{4}, \qquad \log\left((e^{i\frac{3\pi}{4}})^2\right) \;=\; \log(e^{i\frac{3\pi}{2}}) = \;-\,i\,\frac{\pi}{2} \neq i\,\frac{3\pi}{2}\,.$$