

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften Blatt 1: Hausaufgaben

Aufgabe 1:

- a) Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in Polarkoordinaten ($z = re^{i\phi}$) an und markieren Sie die zugehörigen Punkte in einer Skizze der komplexen Zahlenebene.

$$z_0 = -4, \quad z_1 = \sqrt{8}(-1 - i), \quad z_2 = -4i, \quad z_3 = \sqrt{8}(1 - i), \quad z_4 = 4.$$

- b) Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in kartesischen Koordinaten ($z = x + iy$) an.

$$z_5 = 3e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad z_6 = 2e^{i\frac{-\pi}{6}}, \quad z_7 = 2e^{i\frac{-13\pi}{6}}.$$

Lösungshinweise zu Aufgabe 1:

- a) $z_0 = -4 = 4e^{i\pi}$. denn

$$r = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4, \quad \cos(\phi) = -1, \sin(\phi) = 0 \implies \phi = \pi (+2k\pi),$$

$$z_1 = \sqrt{8}(-1 - i) = 4e^{i\frac{-3\pi}{4}} \text{ denn}$$

$$r = \sqrt{(\sqrt{8})^2 + (\sqrt{8})^2} = 4, \quad \cos(\phi) = \sin(\phi) = -\frac{\sqrt{8}}{r} = -\frac{\sqrt{8}}{4} \implies \phi = -\frac{3\pi}{4} (+2k\pi),$$

$$z_2 = -4i = 4e^{i\frac{-\pi}{2}} \text{ denn}$$

$$r = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4, \quad \sin(\phi) = -1, \cos(\phi) = 0 \implies \phi = -\frac{\pi}{2} (+2k\pi),$$

$$z_3 = \sqrt{8}(1 - i) = 4e^{i\frac{-\pi}{4}} \text{ denn}$$

$$r = \sqrt{(\sqrt{8})^2 + (\sqrt{8})^2} = 4, \quad \cos(\phi) = -\sin(\phi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies \phi = \frac{-\pi}{4} (+2k\pi),$$

$$z_4 = 4 = 4e^{0i} \text{ denn}$$

$$r = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4, \quad \cos(\phi) = 1, \sin(\phi) = 0 \implies \phi = 0 (+2k\pi),$$

Skizze : Die Punkte liegen alle auf dem Kreis mit Radius 4 um Null, beginnend mit -4 im mathematisch positivem Sinn jeweils um $\pi/4$ weiter gedreht bis 4.

- b) $z_5 = 3e^{i\frac{\pi}{3}} = 3(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})) = \frac{3}{2} + i \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

$$z_6 = 2e^{i\frac{-\pi}{6}} = 2(\cos(\frac{-\pi}{6}) + i\sin(\frac{-\pi}{6})) = 2(\cos(\frac{\pi}{6}) - i\sin(\frac{\pi}{6})) = \sqrt{3} - i$$

$$z_7 = 2e^{i\frac{-13\pi}{6}} = 2(\cos(\frac{-13\pi}{6}) + i\sin(\frac{-13\pi}{6})) = 2(\cos(\frac{-\pi}{6}) + i\sin(\frac{-\pi}{6})) = z_6.$$

Aufgabe 2:

Berechnen Sie für die komplexen Zahlen aus Aufgabe 1) die kartesischen Darstellungen der folgenden Zahlen:

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}(z_1), \quad \operatorname{Im}(z_1), \quad \operatorname{Re}(z_3), \quad \operatorname{Im}(z_3), \quad z_1 + z_3, \quad z_1 - z_3, \\ & 2z_5 + \sqrt{8}z_3, \quad \bar{z}_1, \quad z_1 \cdot \bar{z}_1, \quad z_1 \cdot z_2, \quad (z_6)^2 \cdot (z_5)^4, \quad \frac{z_5}{z_6}. \end{aligned}$$

Lösungshinweise zu Aufgabe 2:

$$\operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(\sqrt{8}(-1 - i)) = -\sqrt{8}. \quad \operatorname{Im}(z_1) = -\sqrt{8}.$$

$$\operatorname{Re}(z_3) = \operatorname{Re}(\sqrt{8}(1 - i)) = \sqrt{8}. \quad \operatorname{Im}(z_3) = -\sqrt{8}.$$

$$z_1 + z_3 = -2\sqrt{8}i. \quad z_1 - z_3 = -2\sqrt{8}.$$

$$2z_5 + \sqrt{8}z_3 = 2\left(\frac{3}{2} + i \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{8}(\sqrt{8}(1 - i)) = (3 + 8) + i(3\sqrt{3} - 8).$$

$$\bar{z}_1 = \sqrt{8}(-1 + i) \quad z_1 \cdot \bar{z}_1 = |z_1|^2 = 4^2 = 4e^{i\frac{-3\pi}{4}} \cdot 4e^{i\frac{3\pi}{4}} = 4 \cdot 4 \cdot e^0.$$

$$z_1 \cdot z_2 = 4e^{i\frac{-3\pi}{4}} \cdot 4e^{i\frac{-\pi}{2}} = 16e^{i\frac{-5\pi}{4}} = 16e^{i\frac{3\pi}{4}} = 8\sqrt{2}(-1 + i)$$

Hier wäre ausnahmsweise die Multiplikation in kartesischen Koordinaten nicht aufwendiger als in Polarkoordinaten:

$$z_1 \cdot z_2 = \sqrt{8}(-1 - i) \cdot (-4i) = 4\sqrt{8}(i + i^2) = 8\sqrt{2}(-1 + i)$$

$$(z_6)^2 \cdot (z_5)^4 = \left(2e^{i\frac{-\pi}{6}}\right)^2 \left(3e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot e^{\frac{-2i\pi}{6} + \frac{4i\pi}{3}} = 4 \cdot 81 \cdot e^{i(\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3})} = 324e^{i\pi} = -324.$$

$$\frac{z_5}{z_6} = \frac{3e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{-\pi}{6}}} = \frac{3}{2}e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6})} = \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}i.$$

Abgabetermine: 8. - 12.4.19