

Komplexe Funktionen

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4 : Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

In welchen Punkten ihres Definitionsbereiches sind die folgenden Funktionen komplex differenzierbar?

a) $f_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f_1(z) = \operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(z).$

b) $f_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C},$
 $f_2(z) = (\operatorname{Re}(z) + 2)^2 - (\operatorname{Im}(z) + 2)^2 + i[\operatorname{Im}(z)(\operatorname{Re}(z) + 4) + \operatorname{Re}(z)(\operatorname{Im}(z) + 4)].$

c) $f_3 : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, f_3(z) = \frac{z^2}{\bar{z}}.$

Tipp: Verwenden Sie die Cauchy Riemannschen Differentialgleichungen in Polarkoordinaten: $u_r = \frac{1}{r}v_\varphi$ und $v_r = -\frac{1}{r}u_\varphi.$

Aufgabe 2)

a) Bestimmen Sie alle in $D := \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}, x > 0\}$ holomorphen Funktionen mit

(i) $\operatorname{Re}(f(z)) = 3.$

(ii) $\operatorname{Re}(f(z)) = k \log \sqrt{x^2 + y^2}.$

Tipp: Hier wählt man am besten wieder die Cauchy Riemannschen Differentialgleichungen in Polarkoordinaten:

$$u_r = \frac{1}{r}v_\varphi \quad \text{und} \quad v_r = -\frac{1}{r}u_\varphi.$$

b) Gegeben ist die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, u(x, y) := (e^{2y} - e^{-2y}) \sin(2x).$

(i) Zeigen Sie, dass die Funktion u harmonisch ist, d.h. $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0.$

(ii) Konstruieren Sie zu u eine konjugiert harmonische Funktion $v.$ D.h.: Bestimmen Sie v so, dass $f(z) = f(x + iy) = u(x + iy) + iv(x + iy)$ holomorph wird.

Bearbeitungstermine: 20.5.19 - 24.5.19