Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg SoSe 2019

Dr. Hanna Peywand Kiani

Laurent-Reihen, Residuensatz, Partialbruchzerlegung, Kurvenintegrale uneigentliche reelle Integrale 05. 07. 2019

Falls nicht deutlich anders vermerkt gilt für die gesamte HÜ: Γ (das Bild einer) geschlossene(n) stückweise C^1 Kurve in $D \subset \mathbb{C}$. $Uml(\Gamma, z_0) = 1$.

Wiederholung: Wir hatten bereits:

Cauchyscher Integralsatz (CIS) :

D **einfach** zusammenhängend und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph:

$$\oint_\Gamma f(z)\, dz = 0 \ .$$

Einfach zusammenhängend: D hat keine Löcher

Homotopie: Sind Γ und $\tilde{\Gamma}$ zwei geschlossene, stetig und ohne Aufschneiden ineinander verformbare stückweise C^1 Kurven, dann gilt

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = \int_{\tilde{\Gamma}} f(z)\, dz$$

Sei C der positiv orientierte Kreis mit Radius 1 um einen Punkt z_0, $n \in \mathbb{Z}$.

$$\int\limits_C (z - z_0)^n \, dz = \int_0^{2\pi} (z_0 + e^{it} - z_0)^n \, ie^{it} \, dt = \begin{cases} 2\pi i & n = -1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}$$

Homotopie: für jede einfach geschlossene (=doppelpunktfreie) Kurve Γ, die z_0 einmal positiv umläuft gilt

$$\int\limits_\Gamma (z - z_0)^n \, dz, = \begin{cases} 2\pi i & n = -1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}$$

Für jede geschlossene Kurve Γ,und jedes $z_0 \notin \Gamma$ gilt

$$\int\limits_\Gamma (z - z_0)^n \, dz, = \begin{cases} Uml(\Gamma, z_0) \cdot 2\pi i & n = -1 \\ 0 & n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \end{cases}$$

Taylor-Reihen: Wie schon in $\mathbb{R}$

$$\boxed{T(z; f, z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n .}$$

Für jedes Γ geschlossen, mit $Uml\,\Gamma(z_0) = 1$ gilt (CIF)

$$\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz}$$

Die Reihe konvergiert im größten Kreis um z_0 in dem f analytisch ist **gegen** $\boldsymbol{f}$.

$$\oint_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \oint_\Gamma (z - z_0)^n dz = 0$$

Beispiel a) Die Taylor-Reihe von

$$f(z) := \frac{5}{z-3}, \qquad \text{mit } z_0 = 0$$

Für $z = 3$ liegt eine Definitionslücke (isolierte Singularität) vor! Sonst ist f analytisch. Verwende geometrische Reihe: Ziel $(z - z_0)$ Potenzen!

$$f(z) = \frac{5}{z-3} = \frac{5}{(-3)\left(1-\frac{z}{3}\right)} = -\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}}$$

$$= -\frac{5}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{5}{3^{k+1}}\right) \cdot (z-0)^k$$

Konvergenz liegt vor für $\left|\frac{z}{3}\right| < 1$ also $|z| < 3 = r$.
Der Satz aus der Vorlesung besagt, dass die Reihe in dieser Kreisscheibe nicht gegen irgendwas, sondern gegen f konvergiert.

Und was, wenn ich für $|z| > 3$ auch gerne eine Reihe aus $(z - z_0)$ Potenzen hätte?

$$f(z) = \frac{5}{z-3} = \frac{5}{z\left(1 - \frac{3}{z}\right)}$$

$$= \frac{5}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{z}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(5 \cdot 3^k \frac{1}{z^{k+1}}\right) = \sum_{l=} \qquad z^l$$

Allgemeiner:

Laurent-Reihen

Seien: $G \subset \mathbb{C}$, $\quad f : G \to \mathbb{C}$ holomorph in G.

$$D := \{z \in \mathbb{C} \,:\, r < |z - z_0| < R\} \subset G$$

Dann kann f in D in eine Laurent-Reihe entwickelt werden:

$$\boxed{f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz}$$

wobei Γ: wie oben

- Die Reihe konvergiert im größten Ringgebiet $\subset G$ gegen f.
- Die Reihe ist bei <u>vorgegebenem Ring</u> eindeutig.

- Ziel ist NICHT die Koeffizienten über die Integrale zu rechnen sondern umgekehrt.

  Die Koeff' berechnet man z.B. mit

  - bekannten Reihen (Beispiel d,e)
  - geometrische Reihe (Beispiel a oben, Beispiel b, c, g unten)
  - Ableitungen, Integrale

Beispiel b: $f(z) = \dfrac{5}{z-3}$

Gesucht: Entwicklung um $z_0 = 1$.

Definitionslücke (Isolierte Singularität) in $z = 3$.

Funktion ist analytisch in jedem der Ringe:
$R_1 : 0 \leq |z-1| < |3-1|$
$R_2 : |3-1| < |z-1| < \infty$

$z_0 = 1$: Wir wollen in der Reihe Potenzen von $(z-1)$

Umschreiben der Funktion: $f(z) = \dfrac{5}{z-3} = \dfrac{5}{(z-1)+1-3} = \dfrac{5}{(z-1)-2}$

Für $z \in R_1$ gilt: $|z-1| < 2$

$$\frac{5}{z-3} = \frac{5}{(z-1)-2} = \frac{5}{-2\left(1 - \dfrac{z-1}{2}\right)}$$

$$= -\frac{5}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{-5}{2^{k+1}}(z-1)^k \ .$$

In R_1 ist also: Laurent Reihe = Taylor Reihe, d.h. $a_k = 0 \qquad \forall k < \ 0$.

Für $z \in R_2$ gilt $|z-1| > 2$. Damit wir eine konvergente geometr. Reihe erhalten teilen wir hier im 1. Schritt durch $(z-z_0)$.

$$\frac{5}{(z-1)-2} = \frac{5}{(z-1)} \cdot \frac{1}{\left(1-\dfrac{2}{z-1}\right)}$$

$$= \frac{5}{z-1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z-1}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} 5 \cdot \frac{2^k}{(z-1)^{k+1}}$$

$$= \sum_{l=-1}^{-\infty} 5 \cdot 2^{-l-1} \cdot (z-1)^l \,.$$

Erste Reihe konvergent im ersten Ring gegen f
Zweite Reihe konvergent im zweiten Ring gegen f
Keine Darstellung für $|z-1| = 2$

Isolierte Singularitäten

Häufig sind Funktionen nur in einzelnen Punkten nicht analytisch.

Beispiel: Potential/elektrisches Feld einer Ladung Q im Punkt z_0:

$$\Phi(z) = \frac{k \cdot Q}{\|z - z_0\|}, \qquad E(z) = grad\Phi(z) = \frac{k \cdot Q}{\|z - z_0\|^3}(z - z_0)$$

Verhalten der Funktionen in der Nähe solcher Punkte?

$z_0 \in \mathbb{C}$ heißt **isolierte Singulartät** der analytischen Funktion $f : G \to \mathbb{C}$, wenn eine punktierte Umgebung von z_0 zu G gehört, nicht aber z_0 selbst:

$$0 < |z - z_0| < r \subset G, \quad z_0 \notin G, \quad r > 0\,.$$

Beispiele:

- 0 und 1 sind isolierte Singularitäten der Funktion $f(z) := \dfrac{z-1}{z^2(z-1)}$.
- -1 ist keine isolierte Singularität von $f(z) := \log(z)$.

Klassifikation

Sei z_0 isolierte Singulartät von f. Dann kann f in $0 < |z - z_0| < r$ in eine Laurent-Reihe entwickelt werden:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k .$$

- z_0 heißt **hebbare Singularität** $\iff$ $a_k = 0 \quad \forall k < 0 .$

- z_0 heißt **Pol m-ter Ordnung** mit $m \in \mathbb{N}$ $\iff$ $a_{-m} \neq 0 , \quad a_k = 0 \quad \forall k < -m .$

  Die Laurent-Reihe hat also die Form

  $$a_{-m} \frac{1}{(z - z_0)^m} + a_{-m+1} \frac{1}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots + a_{-1} \frac{1}{(z - z_0)^1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

- z_0 heißt **wesentliche Singularität** $\iff$ $a_k \neq 0$ für unendlich viele $k < 0$.

Beispiel c) $f(z) := \dfrac{1}{z(z^2+4)}$

Die Funktion hat in den Nennernullstellen 0, $2i$, $-2i$ isolierte Singularitäten.

Zur Klassifikation gibt es (mindestens) drei Möglichkeiten.

1. Möglichkeit: Reihe berechnen. Für $z_0 = 0$ und $0 < |z| < 2$ gilt

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z^2+4} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{4(1+\frac{z^2}{4})} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{4\Big(1-(-\frac{z^2}{4})\Big)}$$

$$= \frac{1}{4z} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k} z^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^{k+1}} z^{2k-1} = \frac{1}{4z} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^{k+1}} z^{2k-1}}_{\text{positive Potenzen}}$$

$z_0 = 0$ ist also Pol erster Ordnung.

2. Möglichkeit: Reihe wird nicht berechnet

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \underbrace{\frac{1}{z^2+4}}_{g(z)}$$

$g(z)$ ist holomorph (analytisch) nahe $z_0 = 0$ und kann in eine Taylor-Reihe

$$g(z) = g(z_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

entwickelt werden. Damit ist f nahe z_0 gegeben durch

$$f(z) = \frac{g(0)}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} (z - 0)^{k-1}$$

Wegen $g(0) = 1/4 \neq 0$ ist die niedrigste in der Reihe vorkommende Potenz von $(z - 0)$ also -1.

ACHTUNG: Für $|z| > 2$ erhält man für die gleiche Funktion f

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z^2+4} = \frac{1}{z} \cdot \left(\frac{1}{z^2 \left(1 + \frac{4}{z^2}\right)} \right) = \ \ldots = \sum_{=-\infty}^{-1} (-4)^{-k-1} \, z^{2k-1}$$

also unendlich viele Terme mit negativen Potenzen!

Frage: Liegt also doch eine wesentliche Singularität in $z_0 = 0$ vor?

Beispiel d) $f(z) := \dfrac{\sin(z)}{z^4} =$

hat f einen Pol 4. Ordnung in $z_0 = 0$?

Beispiel e) $f(z) := e^{\frac{1}{z+3}}$ hat eine isolierte Singuarität in $z_0 = -3$.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{1}{z+3}\right)^k = +\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot (z - (-3))^{-k}$$

In $z_0 = -3$ liegt eine wesentliche Singularität vor.

Beispiel f) $f(z) := \dfrac{z + 2i}{z^2 + 4}$

ACHTUNG: hebbar $\neq$ rauskürzbar!

Beispiel: $\dfrac{\sin(z)}{z}$

Residuen und Hauptteile

Ist $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ die im $\underline{\text{Ring} \quad 0 < |z-z_0| < R\ }$ konvergente Laurent-Reihe zu f, so heißt

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma f(z)\, dz =: Res f(z_0)$$

das **Residuum von f an der Stelle z**$_0$.

Schreibweise: $\quad Res f(z_0) = Res f(z)\,\big|_{z=z_0} = Res(f; z_0).$

und $\quad h_f(z; z_0) = \sum\limits_{k=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$

der **Hauptteil** von f bei Entwicklung um z_0 / der zu z_0 gehörige **Hauptteil** von f.

Ist f analytisch in einer Umgebung von z_0, so ist $h_f(z; z_0) = 0$

Komplexe Partialbruchzerlegung:

Eine rationale Funktion, die im ∞ verschwindet,
ist die Summe ihrer Hauptteile!

Das heißt: Mit $\quad f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)},$

p und q Polynome mit $\underline{\text{grad}(p) < \text{grad}(q)}$

$z_1, \cdots, z_k$ die Nullstellen von q,

bestimmt man für jedes z_l, $l = 1, \cdots, k$ den Hauptteil und erhält mit

$$f(z) \;=\; h_f(z; z_1) \;+\; h_f(z; z_2) \;+\; \cdots + h_f(z; z_k)$$

die komplexe Partialbruchzerlegung (PBZ) von f.

Für Pole z^* erster Ordnung: $h_f(z; z^*) = a_{-1}\,(z - z^*)^{-1} = \dfrac{Res f(z^*)}{z - z^*}.$

Rechenregeln für Residuen :

- **Regel 1)** z_0 einfacher Pol :

$$Resf(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

- **Regel 2)** $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$, p und q holomorph in einer Umgebung von z_0,

z_0 einfache Nullstelle von q, $p(z_0) \neq 0 \Longrightarrow$

z_0 ist Pol erster Ordnung von f mit $\quad Resf(z_0) = \dfrac{p(z_0)}{q'(z_0)}$

- **Regel 3)** z_0 **Pol m-ter Ordnung)**

$$Resf(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left((z - z_0)^m f(z)\right)^{(m-1)}$$

Beispiel g: $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z-3)} = \dfrac{1}{(z-1)^2}\dfrac{1}{z-3}$

Residuen und PBZ gesucht!

$$Resf(3) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \lim_{z\to 3}(z-3)\frac{1}{(z-1)^2(z-3)}$$

$$Resf(1) = \tfrac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to 1}\left((z-1)^m f(z)\right)^{(m-1)} \qquad \text{mit } m=2$$

$$Resf(1) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 1}\left((z-1)^2\frac{1}{(z-1)^2(z-3)}\right)'$$

PBZ: $f(z) = h_f(z;3) + h_f(z;3)$

$$h_f(z;3) = \frac{Resf(3)}{z-3}$$

Hauptteil zu $z = 1$:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2} \underbrace{\frac{1}{z-3}}_{g(z)}$$

$$= \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \left(g(z_0) + g'(z_0)(z - z_0) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k \right)$$

Beispiel h: $f(z) = \dfrac{1}{z^2+6z+8}\,, \qquad z_0 = 0\,.$

Gesucht sei diejenige Laurent-Reihe, die für $\hat{z} = 3$ gegen $f(\hat{z})$ konvergiert.

1. Schritt: Nullstellen vom Nenner bestimmen: $\dfrac{1}{z^2+6z+8} = \dfrac{1}{(z+2)(z+4)}$

f ist nicht definiert (hat isolierte Singularitäten) in $z = -2$ und $z = -4$

$\Longrightarrow$ Es gibt drei Laurent Reihen

Gesucht die Reihe, die für $\hat{z} = 3$ gegen $f(\hat{z})$ konvergiert

Wir betrachten die Funktion also auf dem Ring

$R_2 \ : \ 2 < |z| < 4.$

2.Schritt: Evtl. Polynomdivision, Ausklammern etc. und PBZ

$$f(z) = \ h_f(z;-2) \ + \ h_f(z;-4) \ =$$

Klassifikation der Singularitäten: $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{1}{z^2 + 6z + 8}$

Residuen: Für einen einfachen Pol gilt

Regel 1) $Res f(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$

Regel 2) $Res f(z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$

PBZ:

3. Schritt: Entwicklungen der einzelnen Terme im richtigen Ring!

$$|z| > 2 \ : \ \frac{1}{z+2} =$$

$$|z| < 4 \ : \ \frac{1}{z+4}$$

Damit erhalten wir die folgende Entwicklung der Funktion f im

Ring $2 < |z| < 4$:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} \left((-1)^{-k-1} \cdot 2^{-k-2} z^k \right) - \sum_{k=0}^{\infty} \left((-1)^k \frac{1}{2 \cdot 4^{k+1}} z^k \right)$$

Integralberechnung über Residuen

Beispiel i: $z_0 = 0$, Γ wie oben. Die Funktion

$f(z) = \dfrac{\cos(z) - 1 + z^2}{z^5}$ hat eine isolierte Singularität in $z_0 = 0$. Es gilt

$$a_{-1} = Res f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)\, dz$$

Andererseits

$$f(z) = \frac{-1 + z^2 + 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} \pm \cdots}{z^5} = \frac{1}{2! z^3} + \frac{1}{4! z} - \frac{z}{6!} + \frac{z^3}{8!} \mp \cdots$$

Also gilt

$$\oint_\Gamma \frac{-1 - z^2 + \cos(z)}{z^5}\, dz = 2\pi i \, \frac{1}{4!}.$$

Man kann also das Integral mit Hilfe von a_{-1} berechnen. Was aber tun wenn die Kurve mehrere Singularitäten umläuft?

Residuensatz : Seien

$D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet

$f : D \setminus \{z_1, \cdots, z_m\} \to \mathbb{C}$ holomorph

Γ geschlossener Weg in $D \setminus \{z_1, \cdots, z_m\}$,

Dann gilt

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} Uml\,\Gamma(z_k)\, Res(f; z_k)$$

Insbesondere falls Γ einfach geschlossen, positiv orientiert und $z_1, \cdots, z_m$ innerhalb von Γ, d.h. $Uml(C, z_k) = 1$

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} Resf(z_k)$$

Im Beispiel h: hatten wir $f(z) = \dfrac{1}{z^2+6z+8}$
mit einfachen Pole in $z=-2$ und $z=-4$ mit den Residuen:

$Resf(-2) =$, $Resf(-4) =$

Zu berechnen sind die Integrale

(Skizze der Kurven vor Ort)

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz \;=\; -2\pi i Resf(-2)$$

$$\int_{\Gamma_2} f(z)dz \;=\; +2\pi i\left[Resf(-2) \;+\; Resf(-4)\right]$$

$$\int_{\Gamma_3} f(z)dz \;=\; -2\pi i Resf(-2) + 2\pi i Resf(-4)$$

Noch schnell ein Satz vor den letzten Beispielen:

Uneigentliche Integrale

Satz: Sei $H := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}\,(z) \geq 0\}$

D Gebiet mit $H \subset D$.

f holomorph in $D \setminus \{z_1, \cdots, z_n\}$

$\{z_1, \cdots, z_n\} \subset H \setminus \mathbb{R}$ (d.h. keine Singularitäten in $\mathbb{R}$,)

$\lim\limits_{z \to \infty} z \cdot f(z) = 0$ glm. in H.

(z.B. f(z) $=$ p(z)/q(z) mit grad q $\geq$ grad p $+2$)

Dann gilt $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1,\text{Im}\,(z_k)>0}^{n} Res f(z_k)$$

Beispiel 1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-2)(x^2+1)}\,dx$

Satz nicht anwendbar! Sinularität in $z = 2 \in \mathbb{R}$.

Beispiel 2) $\displaystyle I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+4)(x^2+1)}\,dx$

$$f(z) = \frac{1}{(z+2i)(z-2i)(z+i)(z-i)}$$

Singularitäten in der oberen Halbebene : $z_1 = i, z_2 = 2i$

$$I = 2\pi i\,(Resf(i) + Resf(2i))$$

$$= 2\pi i \left(\left.\frac{1}{(z+2i)(z-2i)(z+i)}\right|_{z=i} + \left.\frac{1}{(z+2i)(z-i)(z+i)}\right|_{z=2i} \right)$$