Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg SoSe 2019

Dr. Hanna Peywand Kiani

Kurvenintegrale, Cauchyscher Integralsatz
Cauchysche Integralformeln
21. 06. 2019

Komplexe Kurvenintegrale

Gegeben:
Gebiet G, $D \subset G \subset \mathbb{C}$,
Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ stetig,
Eine stückweise C^1- Kurve: $c : [a, b] \to D$.

Falls für beliebige Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b, \quad z_k = c(t_k)$ der Grenzwert von

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(z_k)(z_k - z_{k-1})$$

existiert, definiere das komplexe Kurvenintegral von f längs c als

$$\int_c f(z)dz := \int_a^b f(c(t)) \cdot \dot{c}(t)dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(z_k)(z_k - z_{k-1})$$

Mit $-c$ bezeichnet man die entgegengesetzt durchlaufene Kurve. Es gilt

$$\int_{-c} f(z)dz = -\int_c f(z)dz$$

Mit $-c$ bezeichnen wir also NICHT $\quad \hat{c} : [a,b] \to \mathbb{C}, \hat{c}(t) = -c(t)$.

Beispiel 1) $f(z) := z^{1/2}$ längs Einheitskreis von $-i$ nach i, positiv orientiert

$c(t) =$ $\qquad$ $t \in$ $\qquad$ $\dot{c}(t) =$

$f(c(t)) =$

$$\int_c f(z)dz = \int_a^b f(c(t)) \cdot \dot{c}(t)dt =$$

Andersherum durchlaufen:

$$\tilde{c} = -c, \qquad \tilde{c}(t) \;=\; e^{-it}, \qquad t \in \;[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}], \qquad \dot{\tilde{c}}(t) \;=\; -ie^{-it}$$

$$\int_{\tilde{c}} f(z)dz \;=\; \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{-it}{2}} \cdot (-ie^{-it})dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -i\, e^{-i\frac{3}{2}\,t}\, dt =$$

$$= \;[\,\frac{e^{-i\frac{3}{2}\,t}}{\frac{3}{2}}\,]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \;=\; \frac{2}{3}\,[\,e^{-i\frac{3\pi}{4}} \;-\; e^{i\frac{3\pi}{4}}] \;=\; -\frac{2\sqrt{2}}{3}\,i$$

$$\hat{c} : [a, b] \;\to \mathbb{C},\; \hat{c}(t) = \;-c(t) = -e^{it} \qquad \dot{\hat{c}}(t) = -ie^{it} \qquad f(\hat{c}(t) = \; i \cdot e^{\frac{it}{2}}.$$

$$\int_{\hat{c}} f(z)dz \;=\; \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ie^{\frac{it}{2}} \cdot (-ie^{it})dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{3}{2}\,t}\, dt =$$

$$= \;[\,\frac{e^{i\frac{3}{2}\,t}}{i\frac{3}{2}}\,]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \;=\; -\frac{2i}{3}\,[\,e^{i\frac{3\pi}{4}} \;-\; e^{-i\frac{3\pi}{4}}] \;=\; \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Beispiel 2) Wegabhängigkeit

$f(z) = |z|$, von $z_0 = -1 - i$ bis $z_1 = 1 + i$

i) längs der geradlinigen Verbindung

$c\,[-1,1] \to \mathbb{C}$, $c(t) := (1+i)t$, $t \in [-1,1]$.

$\dot{c}(t) = 1 + i, \qquad |f(c(t))| = |t + it| = \sqrt{t^2 + t^2}$

$$\int_c f(z)dz := \int_{-1}^{1} f((1+i)t) \cdot (1+i)dt$$

$$= \int_{-1}^{1} \sqrt{2t^2} \cdot (1+i)dt = \sqrt{2}\,(1+i) \int_{-1}^{1} \sqrt{t^2}dt$$

$$= \sqrt{2}\,(1+i) \int_{-1}^{1} |t|dt = 2\sqrt{2}\,(1+i) \int_{0}^{1} tdt = \sqrt{2}\,(1+i)$$

ii) Längs des Kreises mit Radius $\sqrt{2}$ um Null, positiv orientiert

$f(z) = |z|$, $\tilde{c} : [-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{C}$, $\tilde{c}(t) := \sqrt{2}e^{it}$

Beachte: f, Anfangspunkt und Endpunkt sind wie oben!

$\dot{\tilde{c}}(t) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $f(\tilde{c}(t)) =$

$$\int_{\tilde{c}} f(z)dz = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(\tilde{c}(t)) \cdot \dot{\tilde{c}}(t)dt =$$

$$= 2 \left[e^{it}\right]_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 2 \left[e^{\frac{i\pi}{4}} - e^{-\frac{i3\pi}{4}}\right]$$

$$= 2 \left[\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2} - (-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2})\right] = 2\sqrt{2}\,(1+i)$$

Das komplexe Kurvenintegral (ist wie schon das reelle) i. A. wegabhängig.

Hauptsatz, Stammfunktionen

Sei $D(f)$ in einfach zusammenhängendes Gebiet G und f analytisch in G

Γ geschlossene stkw. C^1 Kurve in G. Dann gilt der Causchysche Integralsatz

$$\boxed{\oint_\Gamma f(z)dz = 0 \qquad \text{(CIS)}}$$

Folgerung: $\displaystyle\int_{z_0}^{z} f(z)dz$ ist wegunabhängig!

$\Longrightarrow$ Es gibt Stammfunktion $\displaystyle F_{z_0}(z) = \int_{z_0}^{z} f(\hat{z})d\hat{z}$

mit $F'(z) = f(z)$ und $\displaystyle\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)\,.$

Und was heißt **einfach zusammenhängend?**

G hat keine Löcher

Jeder geschlossene Weg lässt sich **in G** stetig auf einen Punkt zusammenziehen (ist **Nullhomotop**)

CIS gilt auch, wenn G nicht einfach zusammenhängend ist,
aber C in G nullhomotop ist.

Beispiel 3: $f(z) := \dfrac{z^2+1}{z}$ längs Einheitskreis

$f(z) =$

$c(t) = e^{it}, \qquad t \in [0, 2\pi], \qquad \dot{c}(t) = i\, e^{it}$

$$\oint_c f(z)dz = \oint_c z + \frac{1}{z}dz = \oint_c z\, dz + \oint_c \frac{1}{z}dz$$

$$= 0 + \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} \cdot ie^{it}dt$$

$$= i \int_0^{2\pi} 1dt = 2\pi\, i.$$

Beispiel 4: Berechnen Sie $\displaystyle\int_{c_1} \frac{\ln(z)}{z}\,dz$

wobei: $\ln = \log =$ Hauptzweig der komplexen Logarithmus-Funktion

c_1 := mathematisch positiv durchlaufener Halbkreis $|z| = 1,\ \mathrm{Re}\,(z) \geq 0$

1.Möglichkeit : direkt

$$\int_{c_1} \frac{\ln(z)}{z}\,dz, = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\ln(e^{it})}{e^{it}}\,ie^{it}\,dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} it \cdot idt =$$

2.Möglichkeit : Stammfunktion

$$F'(z) := \left(\frac{(\ln(z))^2}{2}\right)' = \frac{\ln(z)}{z} = f(z).$$

f : nicht analytisch in $\mathbb{C}$, auch nicht im Einheitskreis, aber analytisch in einem zusammenhängenden Gebiet, welches die Kurve c_1 enthält, daher gilt

$$\int_{c_1} \frac{\ln(z)}{z}\, dz = F(c_1(\pi/2)) - F(c_1(-\pi/2)) = \frac{\left(\ln(e^{i\frac{\pi}{2}})\right)^2}{2} - \frac{\left(\ln(e^{-i\frac{\pi}{2}})\right)^2}{2}$$

$$= \frac{\left(i\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} - \frac{\left(-i\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} = 0.$$

Homotopie: Sei D zweifach zusammenhängend (ein Loch).

Sind C und $\tilde{C}$ zwei geschlossene, in $D\backslash$ Loch (wo f analytisch ist) homotope (d.h. stetig und ohne Aufschneiden ineinander verformbare) stückweise C^1 Kurven, dann gilt

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{\tilde{C}} f(z)\,dz$$

Die wohl wichtigsten Integrale für uns:

Sei C der positiv orientierte Kreis mit Radius 1 um einen Punkt z_0, $n \in \mathbb{Z}$.

$$\int_C (z - z_0)^n \, dz = \int_0^{2\pi} (z_0 + e^{it} - z_0)^n \, ie^{it} \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} ie^{i(n+1)t} \, dt = \begin{cases} [\, i\, t \,]_0^{2\pi} = 2\pi i & n = -1 \\ \left[i \, \dfrac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \right]_0^{2\pi} = 0 & n \neq -1 \end{cases}$$

Homotopie: für jede einfach geschlossene (=doppelpunktfreie) Kurve Γ, die z_0 einmal positiv umläuft gilt

$$\int_\Gamma (z - z_0)^n \, dz, = \begin{cases} 2\pi i & n = -1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}$$

Beispiel:

Das Integral von $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)(z-2a)}$, $a \neq 0$ über einer einmal durchlaufenen $\infty-$ Schlaufe kann nur die Werte 0, $\pm\dfrac{2\pi i}{a}$, $\pm\dfrac{4\pi i}{a}$ annehmen.

Begründung: PBZ: $f(z) = \dfrac{\alpha}{z-2a} + \dfrac{\beta}{z-a}$

$$\alpha(z-a) + \beta(z-2a) \;=\; 1 \implies \alpha = -\beta = \tfrac{1}{a}$$

$$\int_C f(z)dz \;=\; \int_C \left(\frac{\frac{1}{a}}{z-2a} - \frac{\frac{1}{a}}{z-a}\right) dz$$

$$= \tfrac{1}{a}\left(\int_C \frac{1}{z-2a}\,dz - \int_C \frac{1}{z-a}\,dz\right)$$

$$= \tfrac{1}{a}\left(\int_{C_1} \frac{1}{z-2a}\,dz + \int_{C_2} \frac{1}{z-2a}\,dz - \int_{C_1} \frac{1}{z-a}\,dz - \int_{C_2} \frac{1}{z-a}\,dz\right)$$

Cauchyschen Integralformeln (CIF):

Sei f analytisch in einfach zusammenhängendem D

$C : [a, b] \to D \setminus \{z_0\}$ geschlossen, z_0 homotop, stkw. C^1,

Uml$(C, z_0) = 1$: d.h. z_0 wird einmal in math. positiver Richtung umlaufen.

Dann gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \qquad (CIF\ I)$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz \qquad (CIF\ II)$$

Falls $k = Uml(C, z_0) \neq 1$ erhält man auf der linken Seite noch den Faktor k.

Achtung: Integrand nicht mehr analytisch im inneren von C, aber f!

Anwendungen/Beispiele

Berechnung von Integralen bei Nennernullstellen

Folgende Kurvenintegrale sollen berechnet werden . Die angegebenen Kurven sollen, wenn nicht anders vermerkt, einmal in mathematisch positiver Richtung durchlaufen werden.

a) $\displaystyle\int_{C_k} \frac{1}{z^2 - 2z}\, dz \qquad k = 1, 2 \qquad C_1 \, : \, |z| = 1, \quad C_2 : |z - 5| = 1,$

$$\int_{C_2} \frac{1}{z^2 - 2z}\, dz \;=\; 0.$$

$$\int_{C_1} \frac{1}{z(z-2)}\, dz \;=\; \int_{C_1} \frac{\frac{1}{z-2}}{z}\, dz \;=$$

b) $\displaystyle I_C := \int_C \frac{e^z}{1 + 4z^2}\, dz \qquad C : |\mathsf{Re}\, z| + |\mathsf{Im}\, z| \;=\; 1,$

1. Möglichkeit : PBZ

$$I_C := \int_C e^z \left(\frac{a}{2z+i} + \frac{b}{2z-i} \right) \, dz$$

$$= \int_C e^z \left(\frac{i/2}{2z+i} + \frac{-i/2}{2z-i} \right) \, dz$$

$$= \frac{i}{2} \left(\int_C \frac{e^z}{2z+i} dz - \int_C \frac{e^z}{2z-i} dz \right)$$

ACHTUNG !!!!!!!!!!!

$$I_C \neq = \tfrac{i}{2} \, 2\pi i \left(e^{-\frac{i}{2}} - e^{\frac{i}{2}} \right) = -\pi i(-2\sin(1/2))$$

Warum?

Richtig wäre?

2. Möglichkeit : Kurve zerlegen

$$I_C := \int_C \frac{e^z}{1+4z^2}\,dz \;=\; \int_C \frac{e^z}{4(z+\frac{i}{2})(z-\frac{i}{2})}dz$$

$$= \int_{C_1} \frac{e^z}{4(z+\frac{i}{2})(z-\frac{i}{2})}\,dz + \int_{C_2} \frac{e^z}{4(z+\frac{i}{2})(z-\frac{i}{2})}$$

$$= \int_{C_1} \frac{\frac{e^z}{4(z+\frac{i}{2})}}{(z-\frac{i}{2})}\,dz \;+\; \int_{C_2} \frac{\frac{e^z}{4(z-\frac{i}{2})}}{(z+\frac{i}{2})}\,dz$$

$$= 2\pi i \left(\left.\frac{e^z}{4(z+\frac{i}{2})}\right|_{z=\frac{i}{2}} \;+\; \left.\frac{e^z}{4(z-\frac{i}{2})}\right|_{z=\frac{-i}{2}} \right)$$

$$= 2\pi i \left(\frac{e^{\frac{i}{2}}}{4i} + \frac{e^{-\frac{i}{2}}}{-4i} \right) \;=\; \pi i \sin(1/2)$$

Merke:

Wenn **nur eine Nennernullstelle** umlaufen wird, spalte zugehörige(n) Linearfaktor(en) im Nenner ab, versuche den Rest nach oben in den Zähler zu ziehen und CIF I zu verwenden.

Mehrere Definitionslücken: Zerlege Kurve oder Bruch!

Jetzt: Mehrfache Nullstellen im Nenner/ CIF II

$C : [a, b] \to D \setminus \{z_0\}$ geschlossen, z_0 homotop, stkw. C^1

$$\boxed{\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz \;=\; Uml(C, z_0) \cdot 2\pi i \cdot \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}}$$

Beispiel A: $C_k = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = re^{-i\phi},\ r = k,\ \phi \in [0, 2k\pi] \right\}.$

$$\int\limits_{C_1} \frac{e^{-z}}{(z-3)^{n+1}}\, dz \;=$$

$$\int\limits_{C_3} \frac{e^{-z}}{(z-3)^{n+1}}\, dz \;=$$

$$\int\limits_{C_4} \frac{e^{-z}}{(z-3)^{n+1}}\, dz \;=\; Uml(C_4, 3) \cdot 2\pi i \cdot \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Beispiel B: Sei ∂R der mathematisch positiv orientierte Rand (d.h. die Randkurve wird so durchlaufen, dass das Gebiet links liegt) des Gebietes $R := \{z \in \mathbb{C} \,:\, 2 < |z-2| < 4\}$.

Berechnen Sie : $\displaystyle\int_C \frac{z^3}{(z-2i)^2}\,dz$.

Rand von $R = \partial R =$

Hinweise zu H1a:

Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad a_k \in \mathbb{R}\,,\ z_0 = \text{Entwicklungspunkt}$

mit $r := \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$ (falls dies existiert)

bzw. $r := \left(\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \right)^{-1}$

$$\begin{cases} \text{Konvergenz für} & |z - z_0| < r \\ \text{Divergenz für} & |z - z_0| > r \\ \text{keine Aussage für} & |z - z_0| = r \end{cases}$$

Taylor-Reihen

Wie schon in $\mathbb{R}$ gilt

$$\boxed{T(z; f, z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n .}$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz}$$

wobei C den Punkt z_0 ein Mal positiv umläuft.

Die Reihe konvergiert im größten Kreis um z_0 in dem f analytisch ist **gegen f**.

Beispiel a) Taylor-Reihe der Funktion

$$f \,:\, z \to \frac{2}{3+4z}, \qquad \text{mit } z_0 = 1\,.$$

Taylor-Reihe: Verwende geometrische Reihe mit Ziel $(z - z_0)$ Potenzen!

Geometrische Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} q^k$

konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$.

Reihe berechnen:

$$\frac{2}{3+4z} = \frac{2}{3+4(z-1)+4} = 2 \cdot \frac{1}{7+4(z-1)}$$

$$= \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{1+\frac{4}{7}(z-1)} = \frac{2}{7}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{4}{7}(z-1)\right)^k$$

konvergent für $\left|\frac{4}{7}(z-1)\right| < 1$. Also $|z-1| < \frac{7}{4} = r$

Radius berechnen ohne Reihe zu kennen:

Reihe konvergiert im größten kreis um z_0, in dem f analytisch ist, gegen f (nicht gegen irgendwas!)

$$f \,:\, z \to \frac{2}{3+4z}, \qquad \text{mit } z_0 = 1\,.$$

Nenner Nullstelle: $\quad 3+4z=0 \Longrightarrow z = \frac{-3}{4}$

Konvergenz liegt vor für $|z-z_0| < \left|z_0 - \frac{-3}{4}\right| = \frac{7}{4}$.

Beispiel b)

$$g(z) := \frac{1}{\log(3-z)} \qquad z_0 = 0$$

$$\tilde{g}(z) := \frac{1}{\log(3+2i-z)} \qquad z_0 = 3$$

Beispiel c) Die Taylor-Reihe der Funktion $f(z) := \dfrac{2}{e^{4z}+4}$ mit $z_0 = 0$ konvergiert im größten Kreis um Null, in dem

$e^{4z} \neq -4$ gilt, gegen f.

$$e^{4z} = e^{4x} \cdot e^{4yi} = -4 = 4e^{i(2k+1)\pi} \iff 4x = \ln(4)\,, \quad y = \tfrac{(2k+1)\pi}{4}$$

Man muss also die Reihen nicht berechnen, um die Konvergenzradien zu erhalten!