

Dr. Hanna Peywand Kiani

# **Hörsaalübung 5 Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften**

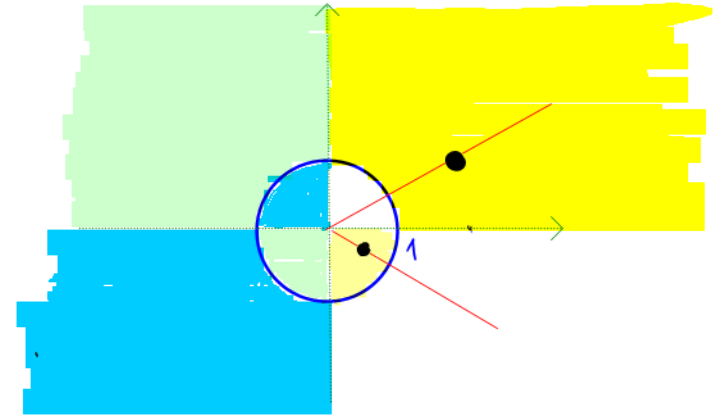
## **Joukowski-Funktion, konforme Abbildungen**

17.05.2019

Die ins Netz gestellten Kopien der Dateien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp- oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT! Eine Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

# Joukowski-Funktion $w = f(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$

$z = re^{i\phi}$ . Bestimme Bilder für  $r$  bzw.  $\phi$  fest



- Offensichtlich:  $f(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ .

$$f(re^{i\phi}) = f\left(\frac{1}{re^{i\phi}}\right) = f\left(\frac{1}{r}e^{-i\phi}\right)$$

- Einheitskreis:  $z = e^{i\phi}$ :

$$f(z) = \frac{1}{2} (e^{i\phi} + e^{-i\phi})$$

Wenn  $\phi$  von 0 bis  $2\pi$  läuft, dann läuft  $f(e^{i\phi})$  von 1 bis -1 und zurück

$$= \frac{1}{2} (\underbrace{\cos(\phi)}_{\cos(\phi)} + i \sin(\phi) + \underbrace{\cos(-\phi)}_{\cos(\phi)} + i \underbrace{\sin(-\phi)}_{-\sin(\phi)}) = \cos(\phi)$$

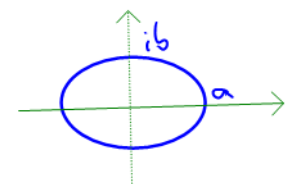
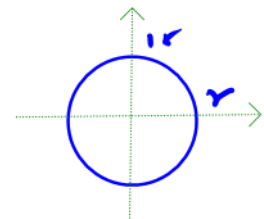
Worauf werden Kurven mit  $|z|$  bzw.  $\arg(z)$  konstant abgebildet?

- **Kreise um Null mit  $r \neq 1$  werden auf Ellipsen abgebildet:**

$$f(re^{i\phi}) = \frac{1}{2} \left( re^{i\phi} + \frac{1}{r}e^{-i\phi} \right) = \frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right) \cos(\phi) + \frac{i}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right) \sin(\phi)$$

Halbachsen:  $a = f(r) = \frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right)$

$$b = |f(ir)| = \left| \frac{1}{2} \left( ir + \frac{1}{ir} \right) \right| = \frac{1}{2} \left| ir - \frac{i}{r} \right| = \frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right)$$



⊗  
setze  
 $e^{i\phi} = \cos(\phi) + i \sin(\phi)$   
und sortiere  
nach  
reell/imaginär

$$z = re^{i0} \\ \cos = 1 \\ \sin = 0$$

Beispiel:  $|z| = 3$  bzw.  $|z| = \frac{1}{3}$

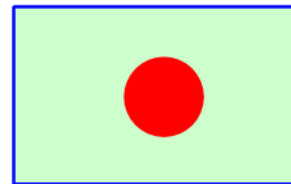
$$f(3) = f\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$f(3i) = f\left(\frac{1}{3i}\right)$$

- Zwecks Umkehrbarkeit: Einschränkung des Definitionsbereiches auf:

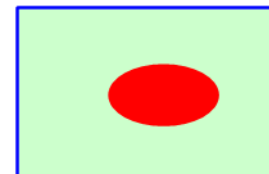
$$G := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus [-1, 1],$$

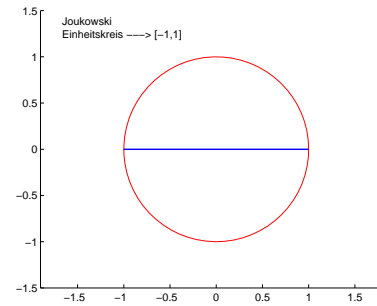
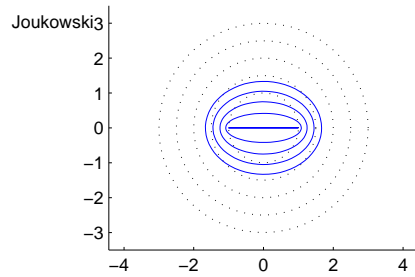
Äußeres eines Kreise um Null wird auf das Äußere der Bildellipse abgebildet.



Äußere des Einheitskreises  $\longrightarrow$

die längs  $\mathbb{R}$  von -1 bis 1 aufgeschnittene komplexe Zahlenebene





Umkehrung der Joukowski Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ ,  $f(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$

$$f^{-1}(w) = w + \sqrt{w^2 - 1}$$

Ellipsen mit  $A^2 - b^2 = 1$  werden auf Kreise um Null abgebildet.

Bei richtiger Wahl der Wurzel (+/-): Äußere der Ellipse auf Äußeres des Bildkreises.

Beispiel:  $z = x + iy$ ,  $\left(\frac{12x}{13}\right)^2 + \left(\frac{12y}{5}\right)^2 = 1$ .

$$f^{-1}\left(\frac{13}{12}\right) =$$

$$f^{-1}\left(-\frac{5i}{12}\right) = -\frac{5i}{12} \pm \sqrt{-\frac{25}{144} - \frac{144}{144}} =$$

- **Jetzt wieder auf ganz  $\mathbb{C}$ : Strahl zum Winkel  $\phi$  (außer  $k\pi/2$ )** wird auf einen Ast der Hyperbel

$$w = u + iv, \quad \frac{u^2}{\cos^2(\phi)} - \frac{v^2}{\sin^2(\phi)} = 1$$

abgebildet. Denn

$$w = f(re^{i\phi}) = \frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right) \cos(\phi) + \frac{i}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right) \sin(\phi)$$

- Joukowski-Funktion mit Definitionsbereich  $z \in \mathbb{C}, \text{Im}(z) > 0$

Strahl der rechten/linken oberen Viertelebene zum Winkel  $\phi$  bzw.  $\pi - \phi$  (außer  $k\pi/2$ ) wird auf rechten/linken Zweig der Hyperbel abgebildet.

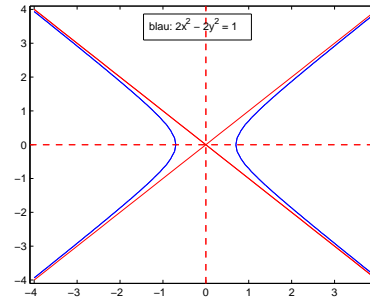
Umkehrung der Joukowski Funktion

$$f^{-1}(w) = w + \sqrt{w^2 - 1}$$

Zu  $i\mathbb{R}$  symmetrische Hyperbeln  $\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} = 1$  mit  $a^2 + b^2 = 1$  werden auf zwei Strahlen in der Oberen Halbebene abgebildet

**Beispiel:** Zur Berechnung des Feldes zwischen zwei hyperbolischen Elektroden:

Bereich außerhalb der Elektroden  $\longrightarrow$  Sektor



Bsp. Hyperbel:  $2x^2 - 2y^2 = 1$

rechter Teil (Ast) der Hyperbel:  $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$

linker Teil (Ast) der Hyperbel:  $f^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$

Zwischenraum:  $f^{-1}(0) =$

Ergebnis: Sektor  $|w| \in (0, \infty)$ ,  $\arg(w) \in ]\pi/4, 3\pi/4[$

# Konforme Verpflanzung von Potentialen

## **Situation:**

Potentialgleichung  $\Delta\Phi(x, y) = 0$  ist in einem schwierigen Gebiet zu lösen.

## **Idee:**

Transformiere das Problem, so dass das Gebiet einfacher wird.

## **Nachteil:**

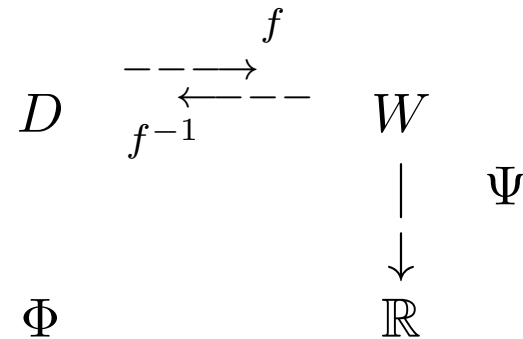
Im allgemeinen Fall entsteht eine schwierigere DGL.

## **Schön:**

Bei konformen Transformationen bleibt es bei der Potentialgleichung.

Sei also  $D \subset \mathbb{C}$  und  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$  irgendeine  $C^2$ -Funktion.

$f : D \rightarrow W \subset \mathbb{C}$ ,      bijektiv ( $f' \neq 0$ ), analytisch  
 $f(z) = f(x + iy) = w = u + iv$



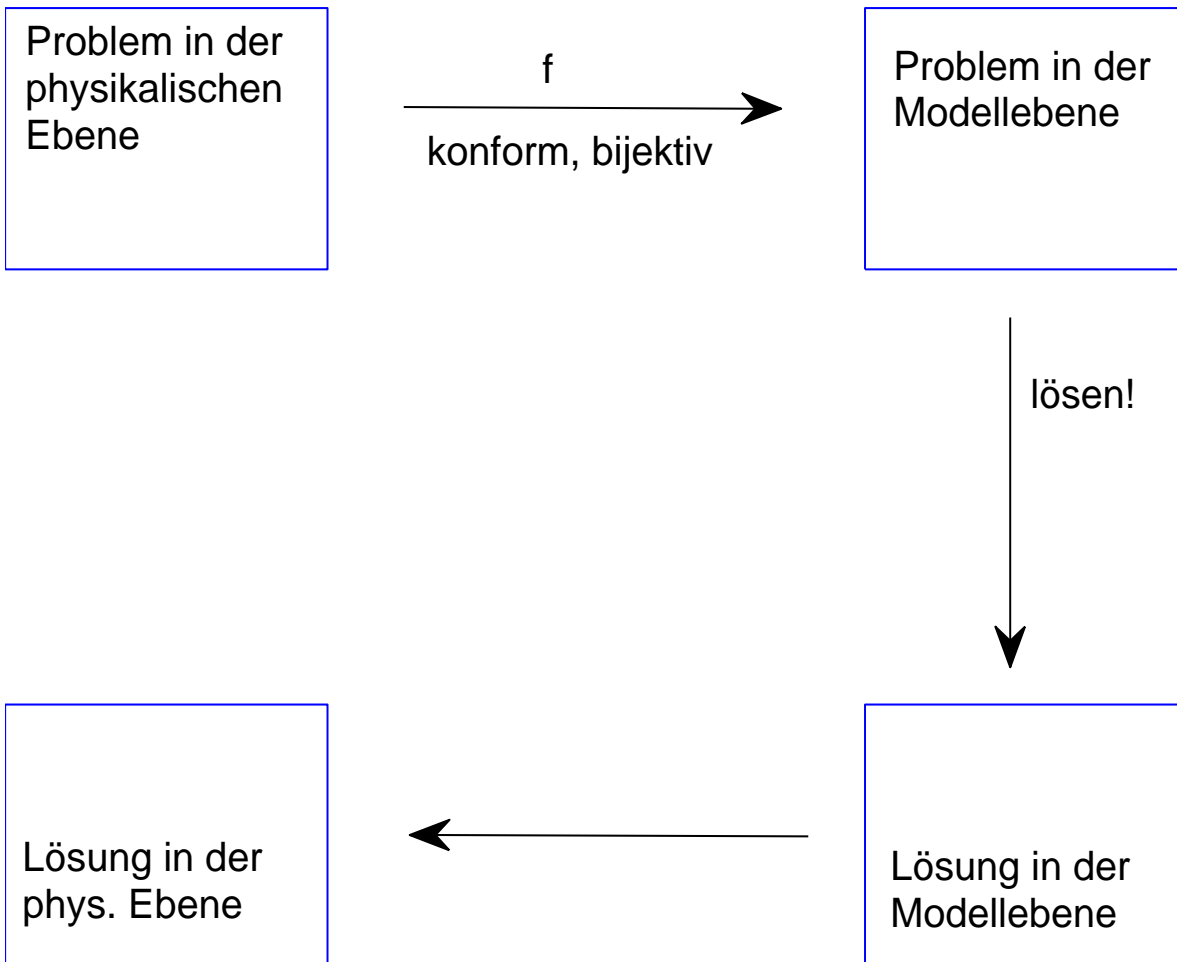
Definiere:

$$\Psi(w) := \Phi(f^{-1}(w))$$

= **konforme Verpflanzung von  $\Phi$  mittels  $f$ .**

**Merke** für später:  $\Phi = \Psi \circ f$





Neben Potential  $\Phi$  interessant: Feldstärke  $E = -\text{grad}(\Phi)$

Gradient im  $\mathbb{R}^2$ :  $\begin{pmatrix} \Phi_x \\ \Phi_y \end{pmatrix}$ , Punkt der Ebene =  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

In  $\mathbb{C}$ : Punkt der Ebene =  $(a + ib)$ , komplexer Gradient =  $\Phi_x + i\Phi_y$ :

Mit  $w = u + iv = f(z)$  und  $\Psi(w) = \Phi(f^{-1}(z))$  (wie oben)

$$\text{grad}_z \Phi(x + iy) = \Phi_x + i\Phi_y = \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x + iy) + i \frac{\partial}{\partial y} \Phi(x + iy)$$

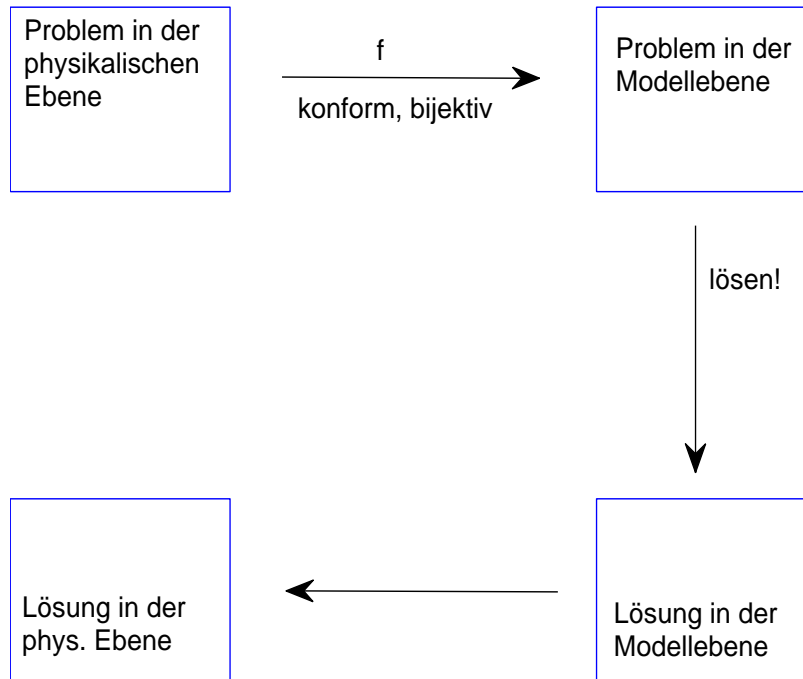
$$\text{grad}_w \Psi(u + iv) = \Psi_u + i\Psi_v$$

$$\text{grad} \Phi(z) = \text{grad} \Psi(w) \cdot \overline{f'(z)} \quad (1. \text{ Verpflanzungssatz})$$

$$\Delta_z \Phi(z) = \Delta_w \Psi(w) \cdot |f'(z)|^2 \quad (2. \text{ Verpflanzungssatz})$$

Wegen  $f'(z) \neq 0$  folgt:  $\Delta_z \Phi(z) = 0 \iff \Delta_w \Psi(w) = 0$

Wir können also die Potentialgleichung in der einfachen Modellebene lösen und zurücktransformieren.



## Was ist ein einfaches Gebiet?

**Streifen:** Zum Beispiel

$$\begin{aligned}\Delta\Psi(w) &= 0, & \text{für } a < \operatorname{Re} w < b, \\ \Psi(w) &= A, & \text{für } w = a + i \cdot \operatorname{Im} w, \\ \Psi(w) &= B, & \text{für } w = b + i \cdot \operatorname{Im} w.\end{aligned}$$

$$\text{Ansatz: } \Psi(u + iv) = g(u)$$

**Laplacegleichung:**

$$\Delta\Psi(u + iv) = \frac{\partial^2}{\partial u^2}\Psi + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\Psi = 0$$

**Lösung:**  $\Psi(w) = \Psi(u + iv) = g(u) = A + \frac{B - A}{b - a}(u - a).$

**Sektor:**

$$\Delta\Psi(w) = 0, \quad \text{für } a < \arg w < b,$$

$$\Psi(w) = A, \quad \text{für } a = \arg w,$$

$$\Psi(w) = B, \quad \text{für } b = \arg w.$$

Ansatz:  $\Psi(re^{i\phi})$  hängt nur von  $\phi$  ab,

Laplacegleichung in Polarkoordinaten:  $r^2\Psi_{rr} + r \cdot \Psi_r + \Psi_{\phi\phi} = 0$

Hier also:

**Lösung:**  $\Psi(w) = \Psi(r, \phi) = g(\phi) = A + \frac{B - A}{b - a} (\phi - a).$

**Ring:**

$$\Delta \Psi(w) = 0, \quad \text{für } a < |w| < b,$$

$$\Psi(w) = A, \quad \text{für } a = |w|,$$

$$\Psi(w) = B, \quad \text{für } b = |w|.$$

Ansatz:  $\Psi(re^{i\phi})$  hängt nur von  $r$  ab.

### Laplacegleichung in Polarkoordinaten

$$\Delta \Psi = \Psi_{rr} + \frac{1}{r} \cdot \Psi_r + \frac{1}{r^2} \Psi_{\phi\phi} = 0$$

Hier also:

**Lösung:**  $\Psi((re^{i\phi})) = \alpha \log(r) + \beta$

## Einheitskreis:

$$\begin{aligned}\Delta\Psi(w) &= 0, & \text{für } |w| < 1, \\ \Psi(e^{i\phi}) &= g(\phi), & \text{für } -\pi < \phi \leq \pi,\end{aligned}$$

Bei hinreichend glatten Randdaten:

$$\Psi(\rho, \phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (A_k \cos(k\phi) + B_k \sin(k\phi))$$

wobei  $A_k, B_k$  die Fourierkoeffizienten von  $g$  sind. (siehe Vorlesung)

## Beispiel:

Gegeben sei ein hohler, sehr langer Kreiszyylinder vom Radius 1. Die obere und die untere Hälfte seien voneinander elektrisch isoliert. Die obere Hälfte befinde sich auf dem Potential  $\Phi = 100 \text{ V}$  und die untere Hälfte befinde sich auf dem Potential  $\Phi = -100 \text{ V}$ . Bei entsprechender Wahl des Koordinatensystems ergibt sich auf dem Schnitt des Zylinders mit der komplexen Zahlenebene :

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= 100\text{V} && \text{für } |z| = |x + iy| = 1, y > 0, \\ \Phi(z) &= -100\text{V} && \text{für } |z| = |x + iy| = 1, y < 0.\end{aligned}$$

Berechnen Sie das Potential und die Feldstärke im Zylinder.



## Lösung:

Idee: Mittels Möbius Einheitskreis  $K_1$  auf eine Gerade durch Null transformieren.

Die beiden Randteile haben zwei Schnittpunkte  $-1$  und  $1$ .

Transformiere diese auf

$$T(z) :=$$

$$T(K_1) =$$

$$T(-1) = \quad T(1) = \quad T(i) = \quad T(0) =$$

$T$  transformiert das innere des Einheitskreises auf

In der Modellebene lautet das Problem

$$\begin{aligned}\Delta \Psi(u, v) &= 0, & \text{für } u > 0, \\ \Psi(0, v) &= 100, & \text{für } v > 0 \text{ bzw. } \arg(w) = \frac{\pi}{2}, \\ \Psi(0, v) &= -100, & \text{für } v < 0 \text{ bzw. } \arg(w) = -\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Wir gehen nicht nur zu Polarkoordinaten über, sondern machen wegen der Struktur der Randdaten den Ansatz  $\Psi = \Psi(\phi)$ . Die zu lösende RWA ist dann

$$\frac{d^2}{d\phi^2} \Psi = 0 \quad \Psi(\pi/2) = 100, \quad \Psi(-\pi/2) = -100$$

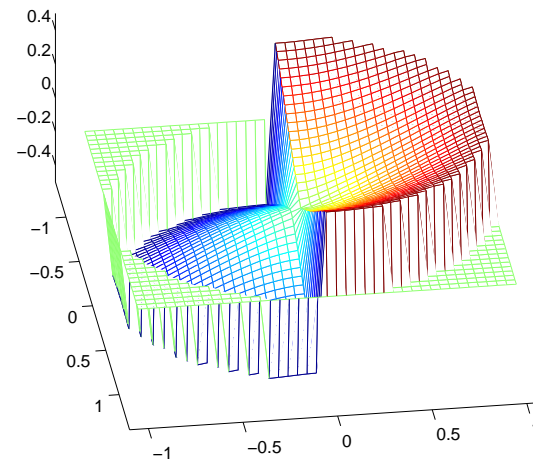
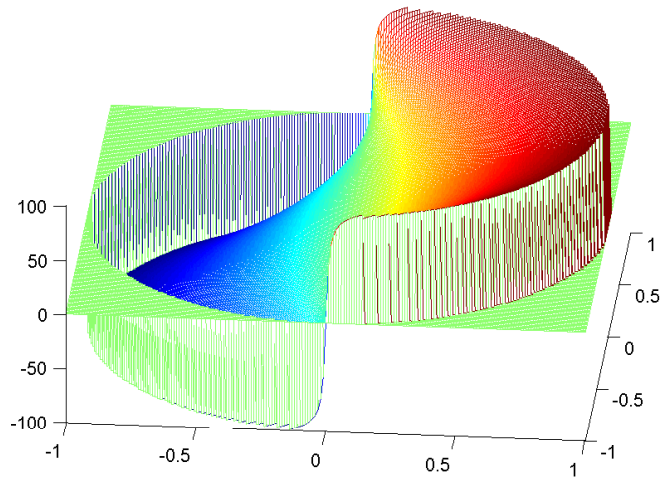
mit der Lösung

$$\Psi(r, \phi) = \frac{200}{\pi} \phi, \quad \text{oder} \quad \Psi(u, v) = \frac{200}{\pi} \arctan\left(\frac{v}{u}\right)$$

In der physikalischen Ebene erhalten wir mit  $\Phi(z) = \Psi(T(z))$

$$\Phi(z) = \frac{200}{\pi} \arctan \left( \frac{\operatorname{Im}(T(z))}{\operatorname{Re}(T(z))} \right) = \frac{200}{\pi} \arctan \left( \frac{2y}{1 - x^2 - y^2} \right)$$

wobei man die letzte Gleichung durch Einsetzen von  $T(z)$  und elementaren Vereinfachungen erhält.



Für die Feldstärke gilt dann nach dem 1. Verpflanzungssatz

$$E = -\text{grad}(\Phi) = -\Phi_x - i\Phi_y = -\text{grad}(\Psi(T(z))\overline{T'(z)}). \text{ Also}$$

$$E(z) = -\text{grad} \Psi \left( \frac{1+z}{1-z} \right) \overline{\left( \frac{2}{(1-z)^2} \right)}$$

oder durch direktes Ableiten von

$$\Phi(x, y) = \frac{200}{\pi} \left( \arctan \frac{2y}{1-x^2-y^2} \right):$$

$$E = -\text{grad}(\Phi) = -\Phi_x - i\Phi_y =$$

$$= -\frac{200}{\pi((1-x^2-y^2)^2 + 4y^2)} (4xy + i(2 - 2x^2 + 2y^2))$$

## Umströmung eines elliptischen Profils:

Gegeben sei eine ebene Strömung mit der Geschwindigkeit  $V \in \mathbb{R}^+$  im Unendlichen um das elliptische Profil

$$E : \left(\frac{12x}{13}\right)^2 + \left(\frac{12y}{5}\right)^2 \leq 1.$$

Bestimmen Sie ein Potential der Strömung und die Geschwindigkeit außerhalb von  $E$ .

Lösung: Die Umkehrung der Joukowski Funktion macht aus der Ellipse, einen Kreis mit Radius  $r = 3/2$  um 0. (vgl. Bsp. Seite 4)

$$\hat{f}(z) := z + \sqrt{z^2 - 1}$$

Um den Einheitskreis zu erhalten, wählen wir

$$w = \tilde{f}(z) := \frac{2}{3} \left( z + \sqrt{z^2 - 1} \right)$$

Es  $\tilde{f}(\infty) = \infty \implies$

Das Äußere der Ellipse geht in das Äußere des Einheitskreises über.

$$\tilde{f}'(z) = \frac{2}{3} \left( 1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}} \right)$$

also

$$\begin{aligned} \lim_{|z| \rightarrow \infty} \left( \tilde{f}'(z) \right) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \left( 1 + \frac{r e^{i\phi}}{\sqrt{r^2 e^{2i\phi} - 1}} \right) \\ &= \frac{2}{3} \lim_{r \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{e^{2i\phi} - 1/r^2}} \right) = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

wegen  $\text{grad } \Phi = \text{grad } \tilde{\Psi} \cdot \overline{f'(z)}$  hat die Strömung in der Modellebene im Unendlichen die Geschwindigkeit  $\frac{3}{4}V$ .

Das Äußere des Einheitskreises kann mit Hilfe der Abbildung

$$\hat{f}(w) := \frac{3}{4} \left( w + \frac{1}{w} \right)$$

auf die längs  $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$  aufgeschlitzte komplexe Zahlenebene transformiert werden.  
Es gilt

$$\hat{f}(\infty) = \infty \quad \text{und} \quad \hat{f}'(\infty) = \frac{3}{4}$$

Insgesamt bilden wir unser ursprüngliches Problem mit Hilfe der Funktion

$$f(z) := \hat{f}(\tilde{f}(z)) = \frac{3}{4} \left( \frac{2}{3} \left( z + \sqrt{z^2 - 1} + \frac{1}{\frac{2}{3}(z + \sqrt{z^2 - 1})} \right) \right)$$

auf die Modellebene ab. Wegen

$$f(\infty) = \infty \quad \text{und} \quad f'(\infty) = 1$$

hat die Strömung im Unendlichen die Geschwindigkeit  $V$ . Sie läuft ungehindert:

$$\Delta\Psi = 0, \quad -\operatorname{grad} \Psi = V + i \cdot 0$$

Also (bis auf imaginäre Konstanten):  $\Psi(w) = -V \cdot u = -V \operatorname{Re}(w)$

$$\Phi(z) = \Psi(f(z)) = -V \operatorname{Re}(f(z)) = \dots$$

und

$$\operatorname{grad} \Phi(z) = \operatorname{grad} \Psi(f(z)) \overline{f'(z)} = -V \overline{f'(z)}$$